受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２０２０の問題・１２

２０２０２０のように，２０を何回か並べた数の，数字と数字の間に１つ＋を入れて，和を求めます。

$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$

$\boxed{+}$

$\boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$ の場合，０２０２０は２０２０であると考えて，２＋２０２０＝２０２２です。

$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$ の場合，２０＋２０２０＝２０４０です。

$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$ の場合，２０２＋２０＝２２２です。

$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{+}\ \boxed{2}\ \boxed{0}$ の場合，２０２０＋２０＝２０４０です。

$\boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{0}\ \boxed{2}\ \boxed{+}\ \boxed{0}$ の場合，２０２０２＋０＝２０２０２です。

以上の和の合計，２０２２＋２０４０×２＋２２２＋２０２０２＝２６５２６のことを，
「２０２０２０の総和」と言うことにします。以下の問いに答えなさい。

（１）２０２０２０２０の総和を求めなさい。

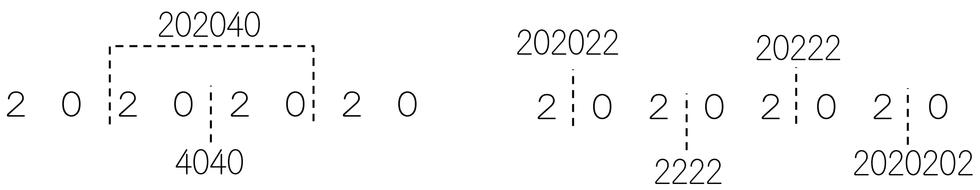
（２）２０２０２０２０２０２０の総和を求めなさい。

（３）２０を何回か並べた整数Ａの総和を求めたところ，一の位と十の位がどちらも８になりました。Ａとして考えられるもののうち最も小さい整数は，何桁（けた）の整数ですか。

最難関問題

２０２０の問題・１２　（１）２６５２７８８　（２）２６５２７９０５３１２　（３）４８桁

（１）０の右側に＋を入れる場合と，２の右側に＋を入れる場合に分けると，和は以下のようになります。



よって，２０２０４０×２＋４０４０＋２０２０２２＋２２２２＋２０２２２＋２０２０２０２
＝２６５２７８８です。

最難関問題

（２）（１）と同様に計算をするのは大変ですから，別の方法を考えます。２０２０２０２０２０２０の各位に現れる２が，＋を入れることで何の位に何回現れるかを求めます。

● $\boxed{2}$０２０２０２０２０２０の$\boxed{2}$は，次のようになります。
$\boxed{2}$＋０２０２０２０２０２０…１の位に現れるので，２×１
$\boxed{2}$０＋２０２０２０２０２０…１０の位に現れるので，２×１０
…
$\boxed{2}$０２０２０２０２０２＋０…２×１０００００００００００
よって，あわせると２×１１１１１１１１１１１になります。

● ２０$\boxed{2}$０２０２０２０２０の$\boxed{2}$は，次のようになります。
２＋０$\boxed{2}$０２０２０２０２０…２×１０００００００００
２０＋$\boxed{2}$０２０２０２０２０…２×１０００００００００
２０$\boxed{2}$＋０２０２０２０２０…２×１
２０$\boxed{2}$０＋２０２０２０２０…２×１０
…
２０$\boxed{2}$０２０２０２０２＋０…２×１００００００００
よって，あわせると２×２１１１１１１１１１になります。

残りの２についても同様に考えていくことで，総和を次のように求めることができます。
２×１１１１１１１１１１１
２×　２１１１１１１１１１
２×　　　４１１１１１１１
２×　　　　　６１１１１１
２×　　　　　　　８１１１
２×　　　　　　　　10１

２×１３２６３９５２６５６＝２６５２７９０５３１２

※影をつけた，２×10１は，１０の位に１０回，１の位に１回現れることを表しているので，計算上は２×１０１です。

最難関問題

（３）（２）の総和の求め方を利用します。整数Ａは２０をいくつか並べているので，必ず桁数が偶数ですから，２×ｎ桁とします。

まず，１の位を考えます。

２×１１１１１…１１
２×　２１１１…１１
２×　　　４１…１１
　　　　…
２×　　　　　　□１
２×　　　…

上の総和の計算において，影をつけた１は，整数Ａに現れる２の個数と等しい個数ありますから，ｎ個あります。よって，１の合計に２をかけると，２×ｎとなります。

次に，１０の位を考えます。

２×１１１１１…１１
２×　２１１１…１１
２×　　　４１…１１
　　　　…
２×　　　　　　□１
２×　　　…

上の総和の計算において，影をつけた１は，整数Ａに現れる２の個数より１個少ないので，
ｎ－１個あります。また，□は２×（ｎ－１）です。１と□は１０の位にありますから，その合計に２０をかけると，
２０×｛ｎ－１＋２×（ｎ－１）｝＝６０×ｎ－６０となります。

以上をあわせると，２×ｎ＋６０×ｎ－６０＝６２×ｎ－６０です。Ａの総和の１の位と１０の位という「下２桁」は，この６２×ｎ－６０の下２桁によって決まります。

６２×ｎ－６０の下２桁が８８であるということは，６２×ｎの下２桁が８８＋６０＝１４８の下２桁である４８であるということです。

最難関問題

６２×ｎの下２桁が４８になるということを，筆算の虫食い算で考えると，次のようにｎの１の位が４である場合と９である場合に分かれます。

$$
\begin{array}{ccc}
 & 6 & 2 \\
\times & \square & 4 \\
\hline
2 & 4 & 8 \\
 & \triangle & \\
\hline
 & 8 & 8
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & 6 & 2 \\
\times & \square & 9 \\
\hline
5 & 5 & 8 \\
 & \triangle & \\
\hline
 & 8 & 8
\end{array}
$$

ｎの１の位が４の場合，△にあてはまる数は４，□にあてはまる数は２ですから，ｎは最も小さくて２４，２×ｎは２×２４＝４８ですから，Ａは４８桁の整数となります。

ｎの１の位が９の場合，△にあてはまる数は３ですが，２×□の１の位が３になることはないので，□にあてはまる数ありません。

以上より，Ａとして考えられるもののうち最も小さい整数は，４８桁です。