受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

らせんの数表と３の倍数

数を１から順に１００００まで時計回りに表に書いていきます。以下は５７６まで書いた状態を表したものです。

507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530
506	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	531
505	420	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	443	532
504	419	342	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	363	444	533
503	418	341	272	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	291	364	445	534
502	417	340	271	210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	227	292	365	446	535
501	416	339	270	209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171	228	293	366	447	536
500	415	338	269	208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172	229	294	367	448	537
499	414	337	268	207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173	230	295	368	449	538
498	413	336	267	206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174	231	296	369	450	539
497	412	335	266	205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540
496	411	334	265	204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176	233	298	371	452	541
495	410	333	264	203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177	234	299	372	453	542
494	409	332	263	202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178	235	300	373	454	543
493	408	331	262	201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179	236	301	374	455	544
492	407	330	261	200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180	237	302	375	456	545
491	406	329	260	199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181	238	303	376	457	546
490	405	328	259	198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182	239	304	377	458	547
489	404	327	258	197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183	240	305	378	459	548
488	403	326	257	256	255	254	253	252	251	250	249	248	247	246	245	244	243	242	241	306	379	460	549
487	402	325	324	323	322	321	320	319	318	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308	307	380	461	550
486	401	400	399	398	397	396	395	394	393	392	391	390	389	388	387	386	385	384	383	382	381	462	551
485	484	483	482	481	480	479	478	477	476	475	474	473	472	471	470	469	468	467	466	465	464	463	552
576	575	574	573	572	571	570	569	568	567	566	565	564	563	562	561	560	559	558	557	556	555	554	553

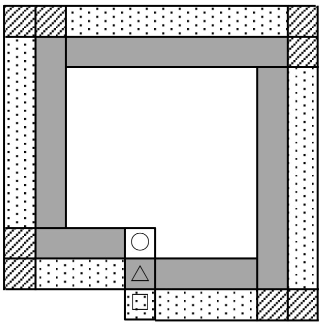
（１）１のマスの２０個下のマスに書かれている数を答えなさい。

（２）３３のマスの真下には６０のマスがあるので，３の倍数がたてに２つ並(なら)んでいます。３３のマスから表をまっすぐ下に進んでいった場合，３の倍数がたてに２つ並んでいる最後の２つのマスに書かれている数は何と何ですか。

（３）３３と６０のマスのように，３の倍数がたてか横に２つ並んでいる場所は表に何か所ありますか。

最難関問題

らせんの数表と３の倍数（１）１５８１　（２）９１６８と９５５５　（３）１０８９か所



（１）１からまっすぐ下に進んでいくと，マスに書かれた数は１，４，１５，３４，６１，…となり，差を求めると３，１１，１９，２７，…という３からはじまり８ずつ増える等差数列になっています。というのも，右の図のようにたてに○，△，□の３つの数が並び，かつ連続しない整数であるとき，○から△に進むときに通るマスを影をつけて表し，△から□に進むときに通るマスをあみ目と斜線で表すと，ちょうど斜線の８マス分だけ△から□に進むときの方が多くなるからです。よって，次のように考えることができます。

４＝１＋３

１５＝１＋３＋（３＋８×１）

３４＝１＋３＋（３＋８×１）＋（３＋８×２）

…となるので，１のマスから２０個下のマスに書かれた数は，１＋３＋（３＋８×１）＋…＋（３＋８×１９）＝１＋３×２０＋８×（１＋…＋１９）＝１＋６０＋８×１９０＝１５８１です。

3
14
33
60
95
138
189
248
315
390
473
564

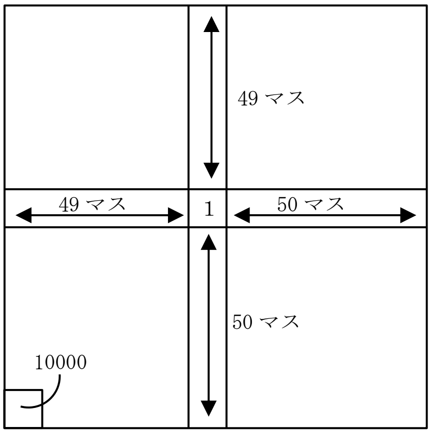
（２）３３のマスからまっすぐ下に進むと，３の倍数は右のように２マス並んで１マス空く，という周期になっています。３３の２つ上にある３のマスから考えると，

３＋（３＋８×１）＝１４，

３＋（３＋８×１）＋（３＋８×２）＝３×３＋８×（１＋２）＝３３，となります。下線を引いたのは，３の倍数となっている部分です。３×３も８×（１＋２）も３の倍数ですから，３３は３の倍数です。６０は３の倍数である３３に３＋８×３を加えるので，やはり３の倍数です。９５は３の倍数である６０に３＋８×４を加えるので３の倍数ではありませんが，１３８は６０に（３＋８×４）＋（３＋８×５）＝３×２＋８×（４＋５）を加えるので３の倍数です。４＋５が３の倍数になるのは，３と６という３の倍数にはさまれた２つの整数は順に（３の倍数＋１），（３の倍数＋２）となっているので，あわせると（３の倍数×２＋３）となるためです。１８９は３の倍数である１３８に３＋８×６を加えるのでやはり３の倍数です。以降も同じことが繰り返されるので，３３のマスからまっすぐ下に進むと，３の倍数は右のように２マス並んで１マス空く，という周期になっていることが確かめられます。

最難関問題

１００００＝１００×１００ですから，マス目の個数は下の図のようになります。



３のマスは１のマスより１マス下がった行にあるので，３から初めて真下に進んだ場合，３＋（３＋８×１）＋…＋（３＋８×□）の答えが書かれたマスは１のマスより□＋１マス下がった行にあることがわかります。よって，□にあてはまるのは５０－１＝４９以下の整数です。また，

６０＝３＋（３＋８×１）＋（３＋８×２）＋（３＋８×３）であることから，３の倍数がたてに２つ並ぶとき，下のほうの数は３＋（３＋８×１）＋…＋（３＋８×□）の□に３の倍数をあてはめた数であることがわかります。４９以下の最大の３の倍数は４８ですから，たてに２つ並んだ下の数は

３＋（３＋８×１）＋…＋（３＋８×４８）＝３×４９＋８×（１＋…＋４８）＝９５５５，上の数は

９５５５－（３＋８×４８）＝９１６８です。

最難関問題

（３）３の倍数が２マス続いて１マス空くという（２）の規則性をもとに３の倍数がたてか横に２つ並んでいる場所を与えられた数表に書き込むと，以下のようになります。

507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530
506	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	531
505	420	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	443	532
504	419	342	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	363	444	533
503	418	341	272	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	291	364	445	534
502	417	340	271	210	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	227	292	365	446	535
501	416	339	270	209	156	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	171	228	293	366	447	536
500	415	338	269	208	155	110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	123	172	229	294	367	448	537
499	414	337	268	207	154	109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83	124	173	230	295	368	449	538
498	413	336	267	206	153	108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84	125	174	231	296	369	450	539
497	412	335	266	205	152	107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451	540
496	411	334	265	204	151	106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86	127	176	233	298	371	452	541
495	410	333	264	203	150	105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87	128	177	234	299	372	453	542
494	409	332	263	202	149	104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88	129	178	235	300	373	454	543
493	408	331	262	201	148	103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89	130	179	236	301	374	455	544
492	407	330	261	200	147	102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90	131	180	237	302	375	456	545
491	406	329	260	199	146	101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91	132	181	238	303	376	457	546
490	405	328	259	198	145	144	143	142	141	140	139	138	137	136	135	134	133	182	239	304	377	458	547
489	404	327	258	197	196	195	194	193	192	191	190	189	188	187	186	185	184	183	240	305	378	459	548
488	403	326	257	256	255	254	253	252	251	250	249	248	247	246	245	244	243	242	241	306	379	460	549
487	402	325	324	323	322	321	320	319	318	317	316	315	314	313	312	311	310	309	308	307	380	461	550
486	401	400	399	398	397	396	395	394	393	392	391	390	389	388	387	386	385	384	383	382	381	462	551
485	484	483	482	481	480	479	478	477	476	475	474	473	472	471	470	469	468	467	466	465	464	463	552
576	575	574	573	572	571	570	569	568	567	566	565	564	563	562	561	560	559	558	557	556	555	554	553

↓の方向では，３３と３６の真下に３か所，その両側に３マスごとに２か所，１か所となり，↑の方向では，９の真上に４か所，その両側３マスごとに３か所，２か所，１か所というように，どの方向でも３の倍数の並ぶ場所が山の形に３マスごとに分布しています。

最難関問題

　山の形に３マスごとに分布する理由は，以下のように考えられます。表において整数はらせん上に並んでおり，らせんが折れ曲がらない限り３の倍数は３マスごとに並びます。そして，下の図の３３と１３５の関係のように，３マス下がるとらせんの折れ曲がらない部分は両側に３マスずつ長くなります。

33	32	31	56
60	59	58	57
95	94	93	92
138	137	136	135
189	188	187	186

では，４つの方向について３の倍数が並ぶ場所が何か所あるかを求めていきましょう。

↓向き

　（２）より３３の真下では，たてに２つ並んだ３の倍数の下のマスは３＋（３＋８×１）＋…＋（３＋８×□)の□に３以上４８以下の３の倍数があてはまるので,４８÷３＝１６より１６か所あります。３６の真下でも同じですから，両側に１６，１５，…，２，１と山の形になるので,（１＋…＋１６）×２＝２７２（か所）です。

↑向き

　９＝２＋７，２４＝２＋７＋（７＋８×１）より，２＋７＋（７＋８×１）＋…＋（７＋８×□）の□に(３の倍数＋１)である整数をあてはめたマスが,２つたてに並ぶ３の倍数の上のマスになります。（２）より１のマスの上には４９マスあり，２のマスは１のマスと同じ行にあるので，２＋７＋（７＋８×１)＋…＋(７＋８×□)の答えが書かれたマスは１のマスより□＋１マス上がった行にあります。よって，□には４９－１＝４８以下の整数があてはまります。４８以下の整数で(３の倍数＋１)である整数は，１を含めて１６個あるので，９の真上には１６か所３の倍数が２つ並んだ場所があります。両側に１５，１４，…，２，１と山の形になるので,（１＋…＋１５）×２＋１６＝２５６（か所）です。

最難関問題

←向き

１８＝５＋（５＋８×１），３９＝５＋（５＋８×１）＋（５＋８×２）より，５＋（５＋８×１）＋…＋（５＋８×□）の□に（３の倍数＋１）である整数をあてはめたマスが，２つ横に並ぶ３の倍数の左のマスになります。（２）より１のマスの左には４９マスあり，１８のマスは１のマスとより２マス左に進んだ列にあるので，５＋（５＋８×１）＋…＋（５＋８×□）の答えが書かれたマスは１のマスより□＋１マス左に進んだ列にあります。よって，□には４９－１＝４８以下の整数があてはまります。４８以下の整数で（３の倍数＋１）である整数は，１を含めて１６個あるので，１８の左には１６か所３の倍数が２つ並んだ場所があります。２１の左でも同じですから，両側に１６，１５，…，２，１と山の形になるので，（１＋…＋１６）×２＝２７２（か所）です。

→向き

３＝３（あえて式にすれば），１２＝３＋（１＋８×１）より，３＋（１＋８×１）＋…＋（１＋８×□）の□に（３の倍数＋１）である整数をあてはめたマスが，２つ横に並ぶ３の倍数の右のマスになります。（２）より１のマスの右には５０マスあり，３のマスは１のマスより右に１マス進んだ列にあるので，３＋（１＋８×１）＋…＋（１＋８×□）の答えが書かれたマスは１のマスより□＋１マス右に進んだ列にあります。よって，□には５０－１＝４９以下の整数があてはまります。４９以下の整数で（３の倍数＋１）である整数は，１を含めて１７個あるので，３の右には１７か所３の倍数が２つ並んだ場所があります。両側に１６，１５，…，２，１と山の形になるので，（１＋…＋１６）×２＋１７＝２８９（か所）です。

以上より，２７２×２＋２５６＋２８９＝１０８９（か所）です。