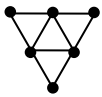


最難関問題

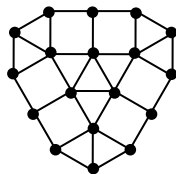
グノモン成長・2

1 辺の長さが 1 cm の正三角形 4 個を組み合わせて 1 番目の図形とします。1 番目の図形の正三角形に正方形を辺がぴったり重なるように組み合わせて、隙間を正三角形で埋めると、2 番目の図形ができます。2 番目の図形の正方形には正三角形を、正三角形には正方形を隙間を正三角形で埋めると、3 番目の図形ができます。4 番目以降の図形も同じ方法で作ります。

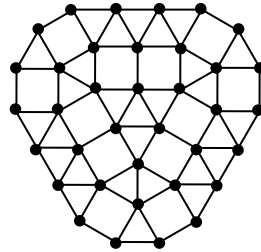
1 番目



2 番目



3 番目



...

...

(1) 4 番目、5 番目の図形には、1 辺 1 cm の正三角形と正方形が、それぞれ何個ありますか。

(2) 30 番目の図形には 1 辺 1 cm の正三角形と正方形が、それぞれ何個ありますか。



最難関問題

グノモン成長・2

- (1) 4番目：正三角形…46個，正方形…24個，5番目：正三角形…76個，正方形…36個
 (2) 正三角形…2698個，正方形…1350個

グノモン成長とは，形が類似したまま（つまり相似でなくともよいということです）大きくなっていくことをいいます。この問題では，正方形と正三角形で平面を敷き詰めるというテッセレーション（有限の種類
 の図形を平面に隙間なく敷き詰めること）の考えを利用しつつ，途中からはずっと類似した形の十二角形が
 大きくなっていきます。

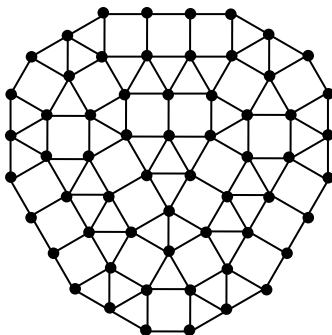
- (1) 1番目から3番目までの図形について，「新たに加えられた」正三角形と正方形の個数を調べると，
 次の表になります。

図形（番目）	1	2	3
正三角形（個）	4	6	18
正方形（個）	0	6	6

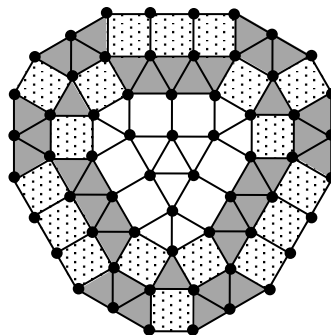
よって，3番目の図形には正三角形は $4 + 6 + 18 = 28$ （個），正方形は $0 + 6 \times 2 = 12$ （個）
 あります。

4番目の図形をかくと，図①のようになります。ここで，3番目から4番目がどのように生じている
 のかを考えます。図②は3周目と4周目の正方形部分と正三角形部分をぬり分けたものです。きまりに
 したがって，3周目の正方形部分の外側には正三角形部分が，正三角形部分の外側には正方形部分が組
 み合わされています。また，ある程度省略して5番目の図形を示すと，図③のようになります。

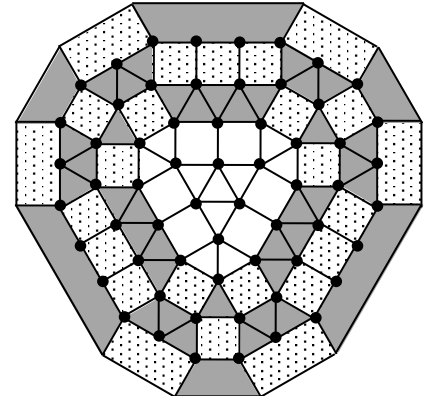
図①

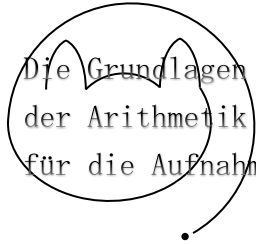


図②



図③





最難関問題

正方形の個数は、1つ前の周の正三角形のうち、外側に辺が出ている三角形の個数に等しいので、それぞれの正三角形部分において $(\text{正三角形の個数} + 1) \div 2$ となっているので、全体では正三角形部分が6か所あることから、 $(\text{正三角形の個数} + 6) \div 2$ となります。同様に考えて、正三角形の個数は、正方形部分が6か所あることから、 $(\text{正方形の個数} \times 2 + 6)$ となります。

よって、4番目の図形で新たに加わる正三角形の個数は $6 \times 2 + 6 = 18$ (個)、正方形の個数は $(18 + 6) \div 2 = 12$ (個) で、5番目の図形で新たに加わる正三角形の個数は $12 \times 2 + 6 = 30$ (個)、正方形の個数は $(18 + 6) \div 2 = 12$ (個) となります。

図形 (番目)	1	2	3	4	5
正三角形 (個)	4	6	18	18	30
正方形 (個)	0	6	6	12	12

以上より、4番目の図形では正三角形が $28 + 18 = 46$ (個)、正方形が $12 + 12 = 24$ (個) で、5番目の図形では正三角形が $46 + 30 = 76$ (個)、正方形が $24 + 12 = 36$ (個) です。

(2) 正三角形の個数は「(1つ前の周の正方形の個数) $\times 2 + 6$ 」,
 正方形の個数は「(1つ前の周の正三角形の個数 $+ 6$) $\div 2$ 」となることから、(1)の表において正方形の個数が6個増えるとその次の周の正三角形の個数は $6 \times 2 = 12$ (個) 増え、正三角形の個数が12個増えるとその次の周の正方形の個数が $12 \div 2 = 6$ (個) 増えます。よって、表を続けると、次のように正三角形の個数も正方形の個数も(最初の部分を除いて)等差数列を成す整数の列を2個ずつ並べたものになります。

図形 (番目)	1	2	3	4	5	6	7	8	...
正三角形 (個)	4	6	18	18	30	30	42	42	...
正方形 (個)	0	6	6	12	12	18	18	24	...

よって、30番目の図形には正三角形が、 $4 + 6 + (18 + 30 + \dots + 174) \times 2 = 2698$ (個)、正方形が、 $(6 + 12 + \dots + 84) \times 2 + 90 = 1350$ (個) あります。