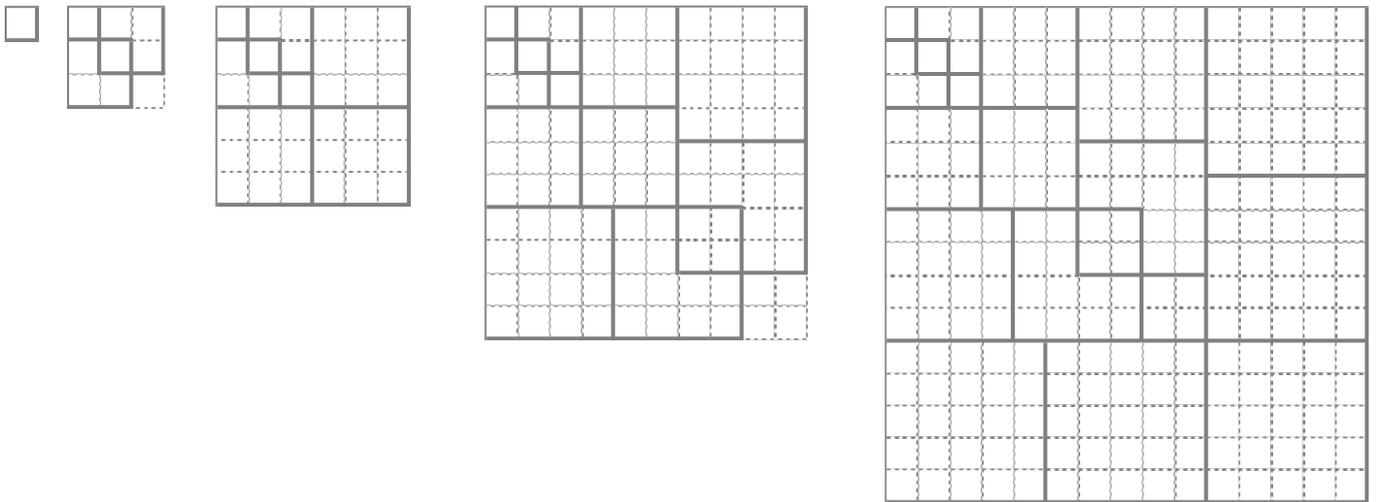


最難関問題

連続する立方数の和と平方数

あるきまりにしたがって、下のように正方形を並べてることができます。このことを参考に、次の問いに答えなさい。



(1) $1 \times 1 \times 1 = 1$, $2 \times 2 \times 2 = 8$, $3 \times 3 \times 3 = 27$, ... のような、同じ整数 3 個の積を、立方数といいます。1 番目から 9 番目までの立方数の和を求める次の式を計算しなさい。

$$1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 + \dots + 9 \times 9 \times 9$$

(2) 1 番目から \square 番目までの立方数の和を求めたところ、次のようになりました。

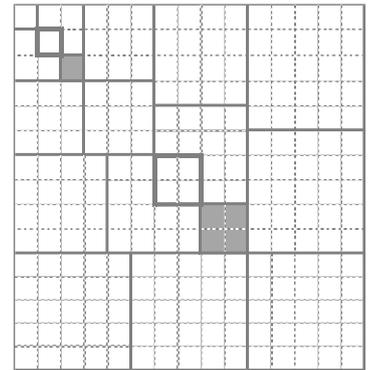
$$1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 + \dots + \square \times \square \times \square = 18496$$

\square にあてはまる数を答えなさい。

最難関問題

連続する立方数の和と平方数 (1) 2025 (2) 16

(1) 問題の図は、 1×1 の正方形を1個、 2×2 の正方形を2個、 3×3 の正方形を3個、と並べているので、 $1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 + \dots$ という連続する立方数の和に相当します。太線で囲った、2つの正方形が重複する部分は、かげをつけた「空き」の部分に当てはめることができます。



よって、連続する立方数の和は平方数になります。さらに、こうしてできる正方形は、1辺が 1 、 $1 + 2 = 3$ 、 $1 + 2 + 3 = 6$ 、 \dots という三角数になるので、同じ三角数を2個かけた平方数になります。

$$1 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 3 \times 3 + \dots + 9 \times 9 \times 9 \\ = (1 + 2 + 3 + \dots + 9) \times (1 + 2 + 3 + \dots + 9) = 45 \times 45 = 2025 \text{ です。}$$

(2) 18496 を素因数分解すると、 $18496 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 17 \times 17$ となるので、 $18496 = (2 \times 2 \times 2 \times 17) \times (2 \times 2 \times 2 \times 17) = 136 \times 136$ です。 $136 = 1 + 2 + 3 + \dots + 16$ なので、 $\square = 16$ です。