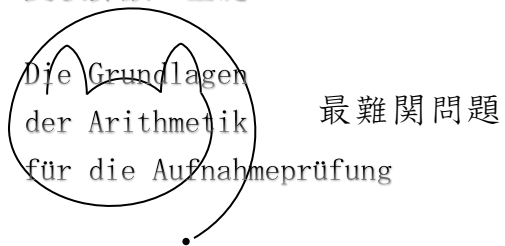
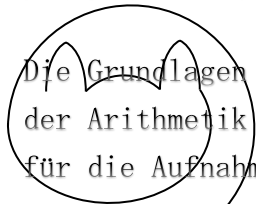


受験算数の基礎



約数の個数と素数判定

2026の約数は、1, 2, 1013, 2026の4個です。2026年から2200年までの年号のうちで、2026と同じく偶数であり、約数の個数が4個である年号は、2026も含めて何個ありますか。



約数の個数と素数判定 15個

素因数分解をすると、 $2026 = 2 \times 1013$ です。約数の個数が4個である整数は、素因数分解をしたときの同じ素数3個の積か、異なる2個の素数の積で表されます。同じ素数3個の積で約数の個数が4個である偶数は、 $2 \times 2 \times 2 = 8$ しかないので、問題の条件にあうのは、 $2 \times (\text{素数})$ で2026以上2200以下の整数です。よって、1013以上1100以下の素数の個数を求めればよいことになります。素数ではない整数を合成数といいます。合成数は2個以上の素数の積で表されるので、合成数の素因数分解に現れる最小の素数の範囲を考えます。 $31 \times 31 = 961$ 、 $37 \times 37 = 1369$ より、最小の素数は31以下の範囲にあります。

よって、2から31までの素数で割り切れない数を考えればよい、という事になります。ここで、素数2および3についてまとめて考えると、2と3の最小公倍数である6で割ったときの余りが0、2、3、4である整数は素数ではありえない(2、3自身を除く)ので、6で割った余りが1か5の整数のみを考えます。

余り5...1013, 1019, 1025, 1031, 1037, 1043, 1049, 1055, 1061, 1067, 1073, 1079, 1085, 1091, 1097

余り1...1015, 1021, 1027, 1033, 1039, 1045, 1051, 1057, 1063, 1069, 1075, 1081, 1087, 1093, 1099

これらの数について、5から31までの素数で割れる数を除いていきます。

○5の倍数

一の位を見ればわかるので、1025, 1055, 1085, 1015, 1045, 1075です。

○7の倍数

ここから先は、6で割った余りが5のグループと余りが1のグループに分けて、それぞれが差が6の等差数列になっていることを利用して倍数を求めます。

$1013 \div 7$ の余りは5であり、 $5 + (6 \text{の倍数})$ が7の倍数になる最初は $5 + 30 = 35$ なので、 $1013 + 30 = 1043$ は7の倍数です。さらに6と7の最小公倍数42を加えた1085も7の倍数ですが、すでに取り除かれています。

$1015 \div 7$ は割り切れます。というのも、 $1015 - 1013 = 2$ であり、1013を7で割ったときの余り5に2を加えると7になるからです。さらに6と7の最小公倍数42を加えた1057, 1099も7の倍数です。

ここまですべてまとめると、下のようになります。

余り5...1013, 1019, ~~1025~~, 1031, 1037, ~~1043~~, 1049, ~~1055~~, 1061, 1067, 1073, 1079, ~~1085~~, 1091, 1097

余り1...~~1015~~, 1021, 1027, 1033, 1039, ~~1045~~, 1051, ~~1057~~, 1063, 1069, ~~1075~~, 1081, 1087, 1093, ~~1099~~

○ 11 の倍数

$1013 \div 11$ の余りは 1 であり, $1 + (6 \text{ の倍数})$ が 11 の倍数になる最初は $1 + 54 = 55$ なので, $1013 + 54 = 1067$ は 11 の倍数です。

$1015 \div 11$ の余りは $1 + 2 = 3$ であり, $3 + (6 \text{ の倍数})$ が 11 の倍数になる最初は $3 + 30 = 33$ なので,

$1015 + 30 = 1045$ は 11 の倍数ですが, すでに取り除かれています。

○ 13 の倍数

$1013 \div 13$ の余りは 12 であり, $12 + (6 \text{ の倍数})$ が 13 の倍数になる最初は $12 + 66 = 78$ なので, $1013 + 66 = 1079$ は 13 の倍数です。

$1015 \div 13$ の余りは 1 であり, $1 + (6 \text{ の倍数})$ が 13 の倍数になる最初は $1 + 12 = 13$ なので, $1015 + 12 = 1027$ は 13 の倍数です。

○ 17 の倍数

$1013 \div 17$ の余りは 10 であり, $10 + (6 \text{ の倍数})$ が 17 の倍数になる最初は $10 + 24 = 34$ なので, $1013 + 24 = 1037$ は 17 の倍数です。

$1015 \div 17$ の余りは 12 であり, $12 + (6 \text{ の倍数})$ が 17 の倍数になる最初は $12 + 90 = 102$ なので, 範囲内に条件を満たす数はありません。

○ 19 の倍数

$1013 \div 19$ の余りは 6 であり, $6 + (6 \text{ の倍数})$ が 19 の倍数になる最初は $6 + 108 = 114$ なので, 範囲内に条件を満たす数はありません。

$1015 \div 19$ の余りは 8 であり, $8 + (6 \text{ の倍数})$ が 19 の倍数になる最初は $8 + 30 = 38$ なので, $1015 + 30 = 1045$ は 19 の倍数ですが, すでに取り除かれています。

○ 23 の倍数

$1013 \div 23$ の余りは 1 であり, $1 + (6 \text{ の倍数})$ が 23 の倍数になる最初は $1 + 114 = 115$ なので, 範囲内に条件を満たす数はありません。

$1015 \div 23$ の余りは 3 であり, $3 + (6 \text{ の倍数})$ が 23 の倍数になる最初は $3 + 66 = 69$ なので, $1015 + 66 = 1081$ は 23 の倍数です。

○ 29 の倍数

29×31 は明らかに 1013 より小さく, $29 \times 37 = 1073$ は 29 の倍数, $29 \times 41 = 1100$ を明らかに越えます。

○ 31 の倍数

$31 \times 31 = 961$, $31 \times 37 = 1147$ なので, 範囲内に条件を満たす数はありません。

こうして, 以下の 15 個が残ります。

余り 5 … 1013, 1019, ~~1025~~, 1031, ~~1037~~, ~~1043~~, 1049, ~~1055~~, 1061, ~~1067~~, ~~1073~~, ~~1079~~, ~~1085~~, 1091, 1097

余り 1 … ~~1015~~, 1021, ~~1027~~, 1033, 1039, ~~1045~~, 1051, ~~1057~~, 1063, 1069, ~~1075~~, ~~1081~~, 1087, 1093, ~~1099~~