

水とエタノールの体積減少・2

100 gのエタノールを100 gの水に混ぜると、濃度50%で200 gのエタノール水溶液ができます。ところが、100 cm³のエタノールを100 cm³の水に混ぜると、エタノール水溶液の体積は200 cm³にはならず、少しだけ小さい体積（温度などの条件によりますが195 cm³前後）になります。

このことを聞いた太郎君は、次の条件を満たす、エタノールに似た物質「クタノール」を考えました。

クタノールの比重は、0.8 g/cm³（水の比重は、1 g/cm³）
水□cm³とクタノール△cm³を混ぜると、
□≥△のとき、体積は(□+△-△×0.1) cm³になり、
□<△のとき、(□+△-□×0.1) cm³になる

例えば、水70 cm³とクタノール30 cm³を混ぜると、 $70 + 30 - 30 \times 0.1 = 97$ (cm³)になります。このとき、クタノール水溶液の「体積濃度」は、 $30 \div 97 = 0.3092\dots$ より、およそ30.9%です。以下の問いに答えなさい。

- (1) 水50 cm³とクタノール50 cm³を混ぜてできるクタノール水溶液の濃度と体積濃度はそれぞれ何%ですか。小数第2位を四捨五入して答えなさい。
- (2) ①、②の問いに答えなさい。
- ① 水400 cm³にクタノールを混ぜたところ、体積濃度は濃度の1.1倍になりました。混ぜたクタノールの体積は何cm³ですか。
- ② 水400 cm³にクタノールを混ぜたところ、体積濃度は濃度の1.2倍になりました。混ぜたクタノールの体積は何cm³ですか。
- (3) クタノール水溶液の体積濃度が濃度の何倍になるか、その範囲を答えなさい。

水とエタノールの体積減少・2

- (1) 濃度…およそ44.4%, 体積濃度…およそ52.6% (2) ①1040cm³ ②250cm³
 (3) 1倍以上1.25倍未満(1倍より大きく1.25倍未満も正解)

(1) 水50cm³の重さは50g, クタノール50cm³の重さは50×0.8=40(g)なので, クタノール水溶液の濃度は40÷(40+50)=0.4444…より, およそ44.4%です。

体積濃度は, 50÷(50+50-50×0.1)=0.5263…より, およそ52.6%です。

(2) 水を□cm³, クタノールを△cm³とすると,

$$\square \geq \triangle \text{ の場合, 体積濃度は } \frac{\triangle}{\square + \triangle \times 0.9}, \text{ 濃度は } \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\square < \triangle \text{ の場合, 体積濃度は } \frac{\triangle}{\square \times 0.9 + \triangle}, \text{ 濃度は } \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \text{ となります。}$$

① □ ≥ △ の場合,

$$\frac{\triangle}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \times 1.1,$$

$$\frac{1}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{0.88}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\frac{25}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{22}{\square + \triangle \times 0.8},$$

□×25+△×20=□×22+△×19.8となって, 式は成立不可能になります。

□ < △ の場合,

$$\frac{\triangle}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \times 1.1,$$

$$\frac{1}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{0.88}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\frac{25}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{22}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\square \times 25 + \triangle \times 20 = \square \times 19.8 + \triangle \times 22,$$

□×5.2=△×2, となるので, □:△=2:5.2=5:13です。

よって, 400× $\frac{13}{5}$ =1040(cm³)です。

② $\square \geq \triangle$ の場合,

$$\frac{\triangle}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \times 1.2,$$

$$\frac{1}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{0.96}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\frac{25}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{24}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\square \times 25 + \triangle \times 20 = \square \times 24 + \triangle \times 21.6,$$

$$\square \times 1 = \triangle \times 1.6, \text{ となるので, } \square : \triangle = 1.6 : 1 = 8 : 5 \text{ です。}$$

よって, $400 \times \frac{5}{8} = 250 \text{ (cm}^3\text{)}$ です。

$\square < \triangle$ の場合,

$$\frac{\triangle}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \times 1.2,$$

$$\frac{1}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{0.96}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\frac{25}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{24}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\square \times 25 + \triangle \times 20 = \square \times 21.6 + \triangle \times 24,$$

$$\square \times 3.4 = \triangle \times 4, \text{ となるので, } \square : \triangle = 4 : 3.4 = 20 : 17 \text{ で, } \square < \triangle \text{ の条件と矛盾します。}$$

以上より, $\square \geq \triangle$ の場合の 250 cm^3 が答えとなります。

(3) $\square \geq \triangle$ の場合,

$$\frac{\triangle}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \times \bigcirc \text{ とすると,}$$

$$\frac{5}{\square + \triangle \times 0.9} = \frac{4 \times \bigcirc}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\square \times 5 + \triangle \times 4 = (\square \times 4 + \triangle \times 3.6) \times \bigcirc, \text{ となります。}$$

ここで, $\square = \triangle$ とすると,

$$\square \times 9 = \square \times 7.6 \times \bigcirc \text{ となるので, } \bigcirc = \frac{9}{7.6} = \frac{45}{38} \text{ です。}$$

$\square > \triangle$ の場合を考えると, $\bigcirc = 1.25$ の場合に,

$$\square \times 5 + \triangle \times 4 = (\square \times 4 + \triangle \times 3.6) \times 1.25,$$

$\square \times 5 + \triangle \times 4 = \square \times 5 + \triangle \times 4.5$, となって, 式は不成立になります。(厳密に言えば, $\triangle = 0$ なら式は成り立ちますが, この場合クタノール水溶液の体積濃度・濃度ともに 0% となるので, $\bigcirc = 1$ です。

この場合については, $\square < \triangle$ の場合に考えます。)

$$\text{よって, } \frac{45}{38} \leq \bigcirc < 1.25 \text{ です。}$$

$\square < \triangle$ の場合,

$$\frac{\triangle}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{\triangle \times 0.8}{\square + \triangle \times 0.8} \times \bigcirc \text{ とすると,}$$

$$\frac{5}{\square \times 0.9 + \triangle} = \frac{4 \times \bigcirc}{\square + \triangle \times 0.8},$$

$$\square \times 5 + \triangle \times 4 = (\square \times 3.6 + \triangle \times 4) \times \bigcirc, \text{ となります。} \bigcirc = 1 \text{ の場合に,}$$

$\square \times 5 + \triangle \times 4 = \square \times 3.6 + \triangle \times 4$ となって, 式は不成立になります。ただし, $\square = 0$ とすれば式は成り立ち, この場合はクタノール水溶液の体積濃度・濃度ともに 100% となるので, 確かに 1 倍となります。上で言及した体積濃度・濃度ともに 0% となる場合も同様です。

$$\text{よって, } 1 \leq \bigcirc < \frac{45}{38} \text{ です。}$$

以上より, 1 倍以上 1.25 倍未満が正解となります。ただし, 1 倍になるのは 0% か 100% の場合なので, クタノール水溶液と言ってよいかどうかはきわどい (というよりどうでもよい) ので, 1 倍より大きく 1.25 倍未満も正解です。