

最難関問題

二重円板

図1のように2枚の円板を中心をそろえて組みあわせます。点P, Qはそれぞれの円板の周上の点です。2枚の円板は独立して回転するので, 2本の直線にそってすべることなく動かすと, 図2のようになります。以下の問いに答えなさい。円周率は3.14とします。

図1

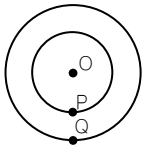


図2

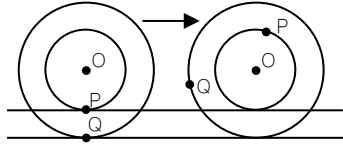
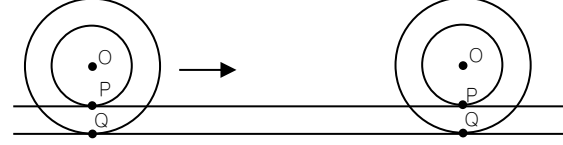


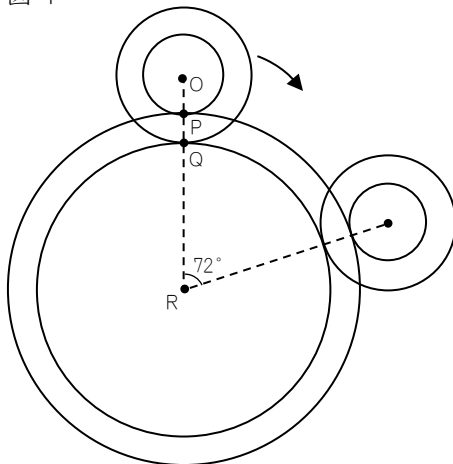
図3



(1) 図3のように, 2本の平行な直線にそって円板をすべることなく回転させます。点PとQがどちらも直線と接している状態から, 再び点PとQがどちらも直線と接するまでに, 小さい円板は5回転, 大きい円板は3回転します。点PとQがどちらも直線と接している状態から, 3点O, P, Qが再び一直線に並ぶまでには, 小さい円板は何回転しますか。

(2) 図4のように中心が重なる2つの円の円周にそって, 円板をすべることなく回転させます。点PとQがどちらも円周と接している状態から図のように72度進んだときに, 3点O, P, Qは再び一直線に並びました。OQの長さはOPの長さの $1\frac{5}{6}$ 倍です。このとき, RPの長さはOPの長さの何倍ですか。

図4



最難関問題

二重円板 (1) 1.25回転 (2) 4.5倍

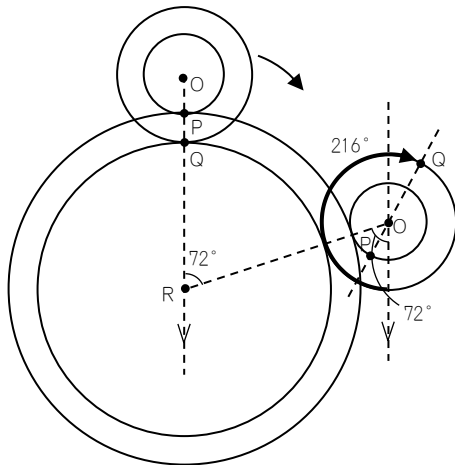
(1) 小さい円板と大きい円板の半径の比は、回転数の比5 : 3の逆比の3 : 5です。比の差の $5 - 3 = 2$ が180度=0.5回転なので、比の5は1.25回転です。

(2) 円がすべることなく回転するとき、「円の回転数=円の中心が動いた距離÷円周」が成り立ちます。

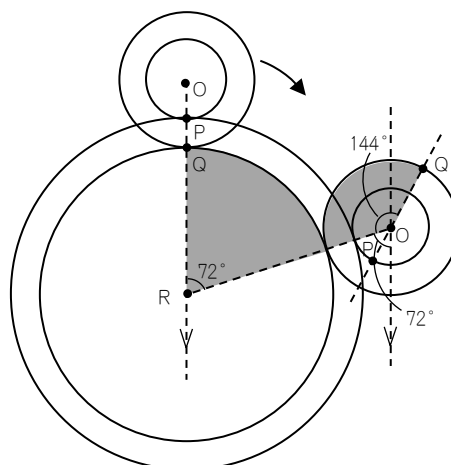
小さい円板と大きい円板の半径の比=円周の長さの比は $1 : 1\frac{5}{6} = 6 : 11$ であり、円の中心Oは共通なので、回転数は逆比の11 : 6になります。このように、半径の比のみで回転数の比は決まるので、(1)のような直線上の回転でも、(2)のような円周上の回転でも、回転数の比は変わりません。

3点O, P, Qが再び一直線になるのは、点PとQが正反対の位置にくるときなので、2つの円板の回転数の差は0.5です。よって、小さい円板の回転数は1.1, 大きい円板の回転数は0.6です。図①はこのときの様子を表しています。大きい円板は $360 \times 0.6 = 216$ (度)回転しています。図②のかげをつけた2つのおうぎ形の弧の長さは等しいので、OQとQRの長さの比は、中心角の比である $144 : 72 = 2 : 1$ の逆比で1 : 2です。

図①



図②



OP : OQ = 6 : 11 であることから、OP : PQ : QR = 6 : 5 : 22 なので、  
OP : PR = 6 : 27 = 2 : 9 となって、 $9 \div 2 = 4.5$  (倍) です。