

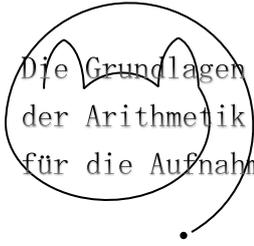
最難関問題

おおむね単位分数の問題

次の問いに答えなさい。

(1) $\frac{1}{3} = \frac{1}{\bigcirc} + \frac{2}{\triangle}$ のとき、 \bigcirc 、 \triangle にあてはまる整数の組み合わせをすべて答えなさい。ただし、 $\frac{1}{\bigcirc}$ と $\frac{2}{\triangle}$ は真分数の既約分数で、 \bigcirc と \triangle は異なります。

(2) $\frac{1}{2} = \frac{1}{\bigcirc} + \frac{2}{\triangle} - \frac{3}{\square}$ のとき、 \bigcirc 、 \triangle 、 \square にあてはまる整数の組み合わせをすべて答えなさい。ただし、 $\frac{1}{\bigcirc}$ 、 $\frac{2}{\triangle}$ 、 $\frac{3}{\square}$ は真分数の既約分数で、 \bigcirc 、 \triangle 、 \square は異なります。



最難関問題

おおむね単位分数の問題

(1) $(\bigcirc, \triangle) = (5, 15), (21, 7)$

(2) $(\bigcirc, \triangle, \square) = (4, 5, 20), (7, 5, 70), (21, 3, 14), (48, 3, 16),$
 $(102, 3, 17)$

(1) $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{2}{12}$ より、 $\frac{1}{\bigcirc}$ が $\frac{2}{\triangle}$ より大きいとき、 $\frac{1}{\bigcirc} > \frac{1}{6}$ となります。また、 $\frac{2}{\triangle}$ が $\frac{1}{\bigcirc}$ より大きいとき、 $\frac{2}{\triangle} > \frac{2}{12}$ となります。

$\frac{1}{\bigcirc} > \frac{1}{6}$ のとき

$\frac{1}{3} > \frac{1}{\bigcirc} > \frac{1}{6}$ ですから、 $3 < \bigcirc < 6$ より、 $\bigcirc = 4, 5$ です。

・ $\bigcirc = 4$ のとき

$\frac{2}{\triangle} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ より、条件を満たしません。

・ $\bigcirc = 5$ のとき

$\frac{2}{\triangle} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ より、 $(\bigcirc, \triangle) = (5, 15)$ です。

$\frac{2}{\triangle} > \frac{2}{12}$ のとき

$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} > \frac{2}{\triangle} > \frac{2}{12}$ ですから、 $6 < \triangle < 12$ であり、 \triangle は2の倍数ではないので、 $\triangle = 7, 9, 11$ です。

・ $\bigcirc = 7$ のとき

$\frac{1}{\bigcirc} = \frac{1}{3} - \frac{2}{7} = \frac{1}{21}$ より、 $(\bigcirc, \triangle) = (21, 7)$ です。

・ $\bigcirc = 9$ のとき

$\frac{1}{\bigcirc} = \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{1}{9}$ より、 $\bigcirc = \triangle = 9$ となるため、条件を満たしません。

最難関問題

・ $\bigcirc = 11$ のとき

$$\frac{1}{\bigcirc} = \frac{1}{3} - \frac{2}{11} = \frac{5}{33} \text{ より, 条件を満たしません。}$$

よって, $(\bigcirc, \Delta) = (5, 15), (21, 7)$ です。

(2) $\frac{1}{\bigcirc} + \frac{2}{\Delta}$ が $\frac{1}{2}$ より大きいことと, $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8}$ より, $\frac{1}{\bigcirc} > \frac{1}{4}$ か, $\frac{2}{\Delta} > \frac{2}{8}$ の 少なくとも一方が成り立っていない ならばなりません。

$\frac{1}{\bigcirc} > \frac{1}{4}$ のとき

$\frac{1}{\bigcirc} > \frac{1}{4}$ ですから, $\bigcirc = 2, 3$ です。

・ $\bigcirc = 2$ のとき

$$\frac{2}{\Delta} - \frac{3}{\square} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bigcirc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ より, } \frac{2}{\Delta} = \frac{3}{\square} \text{ となります。このとき, } \Delta : \bigcirc = 2 : 3 \text{ となりますから,}$$

Δ は 2 の倍数で \bigcirc は 3 の倍数です。 $\frac{2}{\Delta}$ と $\frac{3}{\square}$ が既約分数にならないので, 条件を満たしません。

・ $\bigcirc = 3$ のとき

$$\frac{2}{\Delta} - \frac{3}{\square} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\bigcirc} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ です。このとき, } \frac{2}{\Delta} > \frac{1}{6} = \frac{2}{12} \text{ ですから, } \Delta = 3, 5, 7, 9, 11$$

です。 $\frac{1}{6} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2}{5} - \frac{7}{30} = \frac{2}{7} - \frac{5}{42} = \frac{2}{9} - \frac{1}{18} = \frac{2}{11} - \frac{1}{66}$ より, いずれも条件を満たしません。

最難関問題

$$\frac{2}{\Delta} > \frac{2}{8} \text{ のとき}$$

$\frac{2}{\Delta} > \frac{2}{8}$ ですから、 Δ は 2 の倍数ではないので、 $\Delta = 3, 5, 7$ です。

・ $\Delta = 3$ のとき

$\frac{2}{3}$ は $\frac{1}{2}$ より大きいので、 $\frac{3}{\square} - \frac{1}{\circ} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ となります。このとき、 $\frac{3}{\square} > \frac{1}{6} = \frac{3}{18}$ で、 \square は 4 以上であり 3 の倍数ではないので、 $\square = 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14, 16, 17$ です。

$$\frac{1}{6} = \frac{3}{14} - \frac{1}{21} = \frac{3}{16} - \frac{1}{48} = \frac{3}{17} - \frac{1}{102} \text{ より,}$$

$(\circ, \Delta, \square) = (21, 3, 14), (48, 3, 16), (102, 3, 17)$ です。

・ $\Delta = 5$ のとき

$\frac{1}{\circ} - \frac{3}{\square} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$ となります。このとき、 $\frac{1}{\circ} > \frac{1}{10} = \frac{3}{30}$ より、 $\circ = 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ ですが、 $\circ = 2, 3$ のときに成り立たないことはすでに見ましたから、 $\circ = 4 \sim 9$ の場合を計算します。 $\frac{1}{10} = \frac{1}{4} - \frac{3}{20} = \frac{1}{7} - \frac{3}{70}$ より、 $(\circ, \Delta, \square) = (4, 5, 20), (7, 5, 70)$ です。

・ $\Delta = 7$ のとき

$\frac{1}{\circ} - \frac{3}{\square} = \frac{1}{2} - \frac{2}{7} = \frac{3}{14}$ となります。このとき、 $\frac{1}{\circ} > \frac{3}{14} = \frac{1}{4.66\dots}$ より、 $\circ = 2, 3, 4$ です。計算をしてみると、いずれの場合も条件を満たしません。

以上より、 $(\circ, \Delta, \square) = (4, 5, 20), (7, 5, 70), (21, 3, 14), (48, 3, 16), (102, 3, 17)$ です。