受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

時計算と周期

時計算とは，円周上を‘時計回り’の方向に分速０.５度と分速６度の速さで進む２つの点の移動の問題です。点移動を角速度でとらえる旅人算において回転方向と速度を特定の値に固定したものですから，〇〇算と名前をつけて特定の「単元」であるかのように見せてしまうのは，よいことではありません。とはいえ，このように値を固定することで，あたかも天体観測のように，周期性を色々と探すことができます。以下には，「長針と短針が１から１２までの目盛りを軸に線対称になる場合」，「長針が１２の目盛りと短針のなす角を２等分する場合」，「短針と長針が交代可能な位置になる場合」の３つについて，周期性を求める問題が並んでいます。

1　短針と長針の線対称

時計の短針（時針）は１２時間で時計を１周し，長針（分針）は１時間で時計を１周します。

（１）時計の短針と長針は，それぞれ１分間に何度進みますか。

（２）次の時刻を答えなさい。

①１２時ちょうどを過ぎて，はじめて短針と長針が１の目盛りを軸に線対称な位置にくるのは，１２時何分ですか。

②１２時ちょうどを過ぎて，はじめて短針と長針が２の目盛りを軸に線対称な位置にくるのは，１２時何分ですか。

③１２時ちょうどを過ぎて，はじめて短針と長針が３の目盛りを軸に線対称な位置にくるのは，１２時何分ですか。

（３）１時ちょうどから２時の直前までと，２時ちょうどから３時の直前までで，短針と長針が１から１２のいずれかの目盛りを軸に線対称な位置にくることは，それぞれ何回ありますか。

（４）２月３日正午から３００回目に短針と長針が１から１２のいずれかの目盛りを軸に線対称な位置にくるのは，いつですか。日付と午前午後とともに，時刻を答えなさい。ただし，２つの針が重なっている場合は除きます。

時計算と周期

☐2 長針による，１２の目盛りと短針の２等分（１）

以下の問いにおいて，「長針が短針と１２の目盛りが作る角を２等分する」とは，図１および図２のように，短針と１２の目盛りが作る小さい方か大きい方の角を２等分することをいいます。

図１

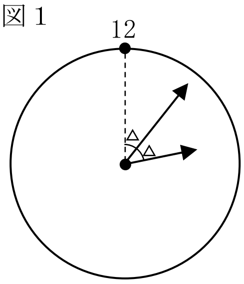
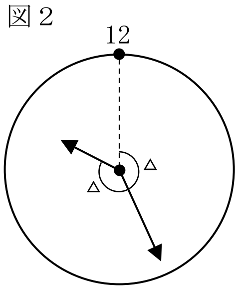


図２



（１）１２時ちょうどを過ぎてから１回目に長針が，短針と１２の目盛りが作る角を２等分するのは，何時何分ですか。

（２）１２時ちょうどを過ぎてから２回目に長針が，短針と１２の目盛りが作る角を２等分するのは，何時何分ですか。

（３）１２時ちょうどを過ぎてから５回目に長針が，短針と１２の目盛りが作る角を２等分するのは，何時何分ですか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

時計算と周期

$\boxed{3}$ 長針による，１２の目盛りと短針の２等分（２）　Ｎ倍分針

以下の問いにおいて，「長針が短針と１２の目盛りが作る角を２等分する」とは，短針と１２の目盛りが作る小さい方か大きい方の角を２等分することをいいます。

（１）次の文の $\boxed{\text{あ}}$ にあてはまる数を答えなさい。

> 長針と短針は１２時ちょうどに１２の目盛りを差しています。もしも時計に長針の $\boxed{\text{あ}}$ 倍の速さで進み，１２時ちょうどには１２の目盛りを差す針がついていたのなら，長針が，短針と１２の目盛りが作る角を２等分するとき，短針は長針の $\boxed{\text{あ}}$ 倍の速さで進む針と重なっています。

以下では，長針の $\boxed{\text{あ}}$ 倍の速さで進み，１２時ちょうどには１２の目盛りを差す針のことをＮ倍分針と呼ぶことにします。

（２）①短針とＮ倍分針は何分ごとに重なりますか。

②１２時ちょうどを過ぎてから１２時間の間に，長針が短針と１２の目盛りが作る角を２等分することは何回ありますか。ただし，２つの針が重なっている場合は除きます。

（３）１２時ちょうどを過ぎてから１２時間の間に，長針が短針と１２の目盛りが作る角を２等分し，長針と１２の目盛りが作る角の大きさが１００度以上１２０度以下となる時刻を全て求めなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

時計算と周期

4　短針と長針の交代可能な位置（１）

時計の短針（時針）は１２時間で時計を１周し，長針（分針）は１時間で時計を１周します。

（１）時計の短針と長針の速さの比を求めなさい。

図１と図２では，短針が図１の状態から初めて図１の長針の位置に進んだとき，短針と長針の位置がちょうど入れかわっています。このようなことが可能で，２つの針が重なっていないとき，図１において短針と長針は「交代可能な位置」にあるということにします。

図１

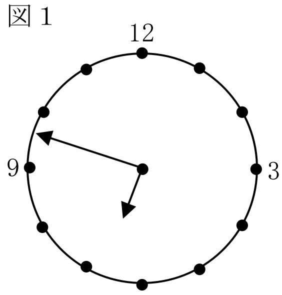
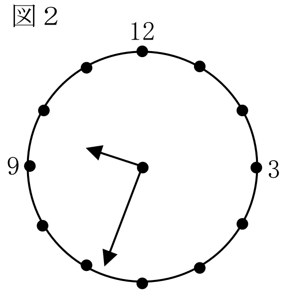
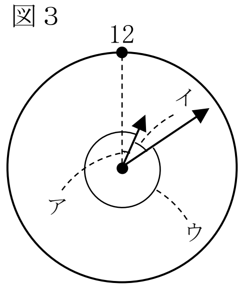


図２



（２）１２時ちょうどを過ぎて，はじめて短針と長針が交代可能な位置になるときを考えます。図３において，１２の目盛りと短針のなす小さいほうの角ア，短針と長針のなす小さいほうの角イ，短針と長針のなす大きいほうの角ウの大きさの比を求めなさい。

図３



（３）１２時ちょうどを過ぎて，２回目に短針と長針が交代可能な位置になるとき，１２の目盛りと短針のなす小さいほうの角度を求めなさい。

時計算と周期

$\boxed{5}$ 短針と長針の交代可能な位置（２）　Ｎ倍分針

以下の問いに答えなさい。

（１）次の文の$\boxed{\text{あ}}$～$\boxed{\text{え}}$にあてはまる数を答えなさい。

> 短針と長針の速さの比は$\boxed{\text{あ}}$：$\boxed{\text{い}}$です。短針と長針が交代可能な位置にあり，短針が長針の位置まで進むとき，長針は短針の$\boxed{\text{う}}$倍の角度を進んで短針の位置まで進みます。よって，もしも時計に長針の$\boxed{\text{え}}$倍の速さで進み，１２時ちょうどには１２の目盛りを差す針がついていたのなら，短針と長針が交代可能な位置にあるとき，短針は長針の$\boxed{\text{え}}$倍の速さで進む針と重なっています。

以下では，長針の$\boxed{\text{え}}$倍の速さで進み，１２時ちょうどには１２の目盛りを差す針のことをＮ倍分針と呼ぶことにします。

（２）短針は何度進むたびに，Ｎ倍分針に重なりますか。

（３）１２時ちょうどを過ぎてから，１３回目に短針と長針が交代可能な位置にくるのは，何時何分ですか。

（４）１２時ちょうどを過ぎてから１２時間の間に，短針と長針が交代可能な位置にあることは何回ありますか。

$\boxed{6}$ 短針と長針の交代可能な位置（３）

以下の問いに答えなさい。

（１）１時ちょうどを過ぎて，はじめてに短針と長針が交代可能な位置になりました。短針と長針の位置が交代したときの時刻を求めなさい。

（２）１時ちょうどを過ぎて，２回目に短針と長針が交代可能な位置になりました，短針と長針の位置が交代したときの時刻を求めなさい。

（３）１２時ちょうどを過ぎて，１００回目に短針と長針が交代可能な位置になるのは，何時から何時の間ですか。また，その短針と長針の位置が交代するのは，何時から何時の間ですか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

時計算と周期

7 短針と長針の交代可能な位置（４）

以下の問いに答えなさい。

（１）１２時ちょうどから，１回目に短針と長針が交代可能な位置にあり，さらに短針と長針が左右対称となっているのは，何時何分ですか。

（２）１２時ちょうどから，２回目に短針と長針が交代可能な位置にあり，さらに短針と長針が左右対称となっているのは，何時何分ですか。

（３）１２時ちょうどから１２時間の間に，短針と長針が交代可能な位置にあり，さらに短針と長針が左右対称となっているのは，何回ですか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

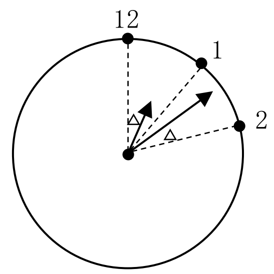
時計算と周期

解答解説

1　（１）０.５度，６度　（２）①１２時９$\frac{3}{13}$分　②１２時１８$\frac{6}{13}$分　③１２時２７$\frac{9}{13}$分

（３）６回，７回　（４）２月５日午前１０時３６$\frac{12}{13}$分

（１）短針は６０分間で３０度進むので，３０÷６０＝０.５（度）
長針は６０分間で３６０度進むので，３６０÷６０＝６（度）



（２）①右図において，短針が進んだ角度と，長針から２の目盛りまでの角度は等しくなります。よって，２つの針があわせて３０×２＝６０（度）進めばよいので，６０÷（０.５＋６）＝$\frac{120}{13}$（分）より，１２時９$\frac{3}{13}$分です。
②同様に，短針が進んだ角度と，長針から４の目盛りまでの角度は等しくなります。よって，２つの針があわせて３０×４＝１２０（度）進めばよいので，１２０÷（０.５＋６）＝$\frac{240}{13}$（分）より，１２時１８$\frac{6}{13}$分です。
③短針が進んだ角度と，長針から６の目盛りまでの角度は等しくなります。よって，２つの針があわせて３０×６＝１８０（度）進めばよいので，１８０÷（０.５＋６）＝$\frac{360}{13}$（分）より，１２時２７$\frac{9}{13}$分です。

（３）以上より，$\frac{120}{13}$分ごとに２つの針は対称になります。１２時から１時までの間では，６０÷$\frac{120}{13}$＝６.５より６回あり，１２時から２時までの間では，１２０÷$\frac{120}{13}$＝１３より１３回ありますが，１３回目はちょうど２時なので，１時ちょうどから２時直前までには１２－６＝６(回)あります。また，１２時から３時までの間では，１８０÷$\frac{120}{13}$＝１９.５より１９回あるので，１９－６×２＝７（回）です。
　ここに現れる回数の違いは，１時ちょうどから２時直前の場合は１～６の６つの目盛りに対して１回ずつ両針が線対称になるのに対して，２時ちょうどから３時直前の場合は１～６の６つの目盛

りに対して１回ずつ両針が線対称になるのに加えて２時の瞬間にも両針が１の目盛りに対して対称になっているためです。

（４）以上より，$\frac{120}{13}$分ごとに２つの針はある目盛りに対して線対称になるので，１２時間＝７２０分に，７２０÷$\frac{120}{13}$＝７８（回）線対称になりますが，７８回目は１２時ちょうどですから２つの針が重なってしまいます。よって，７８－１＝７７（回）線対称になります。また，（３）より１２時台，１時台，３時台，５時台，７時台，９時台，１１時台は両針が線対称になるのは６回，２時台，４時台，６時台，８時台，１０時台の５回は両針が線対称になるのは７回ですから，６×７＋７×５＝７７（回）と求めることもできます。

３００÷７７＝３余り６９より，１２時間が３回経過した２月５日の午前において，６９－（６＋６＋７＋６＋７＋６＋７＋６＋７＋６）＝５より，１０時台の５回目ですから，１０時ちょうどから４回目となって，$\frac{120}{13}\times4=36\frac{12}{13}$（分）より，１０時３６$\frac{12}{13}$分です。

$\boxed{2}$ （１）１２時３１$\frac{7}{23}$分　（２）１時２$\frac{14}{23}$分　（３）２時３６$\frac{12}{23}$分

（１）短針と長針の進む速さの比は，０.５：６＝１：１２です。下図３のように，短針が$\boxed{1}$進むと，長針は$\boxed{12}$進みます。長針と短針の間の角の大きさは，$\boxed{12}-\boxed{1}=\boxed{11}$ですから，長針から１２の目盛りの間の角の大きさも$\boxed{11}$です。よって，短針は１周の$\frac{1}{23}$を進んでいます。$\frac{360}{23}\div0.5=31\frac{7}{23}$（分）より，１２時３１$\frac{7}{23}$分です。

（２）２回目は図４のように,長針が１周して,１２の目盛りと短針が作る小さいほうの角を２等分します。短針が$\boxed{2}$進むと，長針は$\boxed{24}$進みます。このとき，時計１周の角度（３６０度）は$\boxed{24}-\boxed{1}=\boxed{23}$ですから，短針は１周の$\frac{2}{23}$を進んでいます。$\frac{720}{23}\div0.5=62\frac{14}{23}$（分）より，１時２$\frac{14}{23}$分です。

図３

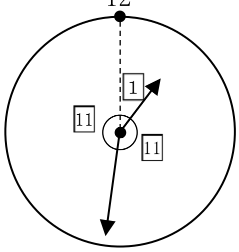
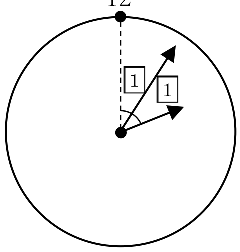


図４



（３）（１）（２）において，短針は時計を２３等分した目盛りにおいて１目盛りずつ進み，長針は１２目盛りずつ進んでいます。同様にして進んだ目盛りについて調べると，以下のようになります。

短針（目盛り）	１	２	３	４	５
長針（目盛り）	１２	２４-２３＝１	１＋１２＝１３	１３＋１２－２３＝２	２＋１２＝１４

○短針が３目盛り進んだとき

長針と短針の間の目盛りは１３－３＝１０，長針と１２の間の目盛りは２３－１３＝１０ですから，長針は短針と１２の目盛りを２等分しています。

○短針が４目盛り進んだとき

長針と短針の間の目盛りは４－２＝２，長針と１２の間の目盛りは２－０＝２ですから，長針は短針と１２の目盛りを２等分しています。

○短針が５目盛り進んだとき

長針と短針の間の目盛りは１４－５＝９，長針と１２の間の目盛りは２３－１４＝９ですから，長針は短針と１２の目盛りを２等分しています。

よって，５回目は短針が５目盛り進んだときとなります。短針が１目盛り進むのにかかる時間が$31\frac{7}{23}$分ですから，$31\frac{7}{23}\times 5=156\frac{12}{23}$（分）より，２時$36\frac{12}{23}$分です。

$\boxed{3}$　（１）２　（２）$\frac{720}{23}$分ごと，２２回　（３）４時$41\frac{17}{23}$分，７時$18\frac{6}{23}$分

（１）長針の２倍の速さで進む針，２倍分針を考えると，長針は常に２倍分針の半分の距離しか進んでいないため，１２の目盛りと２倍分針の真ん中にあることになります。

（２）２倍分針の速さは毎分１２度ですから，$360\div(12-0.5)=\frac{720}{23}$（分）ごとです。また，短針は$\frac{720}{23}$分間に$0.5\times\frac{720}{23}=\frac{360}{23}$（度）進み，つまりは時計１周＝３６０度の$\frac{1}{23}$を進みます。１２時間で短針は時計を１周するので，$\frac{1}{23}$～$\frac{22}{23}$で，２２回です。

（３）短針が時計の$\frac{1}{23}$を進むとき，長針は$\frac{12}{23}$を進みます。時計を２３等分した目盛りにおいて，短針および長針が進んだ目盛りと，長針と１２の目盛りの間の目盛りの数は，以下のようになります。

短針が進んだ目盛り	1	2	3	4	5	6	…
長針が進んだ目盛り	１２	２４	３６	４８	６０	７２	…
長針と12の目盛りの小さいほうの差	１１	1	１０	2	9	3	…

$\frac{100}{360}=\frac{6.3\ldots}{23}$，$\frac{120}{360}=\frac{7.6\ldots}{23}$より，長針と１２の目盛りの差が$\frac{7}{23}$となればよいことがわかります。

上の表の規則性より，短針の進んだ目盛りが奇数のときと偶数のときのそれぞれについて求めます。

・短針の進んだ目盛りが奇数のとき…１＋２×（１１－７）＝９より，短針が９目盛り進めばよいので，

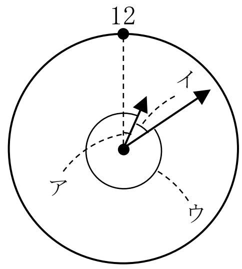
$360\times\frac{9}{23}\div0.5=281\frac{17}{23}$（分）より，４時$41\frac{17}{23}$分です。

・短針の進んだ目盛りが偶数のとき…２＋２×（７－１）＝１４より，短針が１４目盛り進めばよいので，

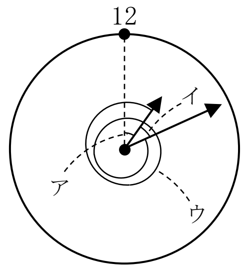
$360\times\frac{14}{23}\div0.5=438\frac{6}{23}$（分）より，７時$18\frac{6}{23}$分です。

$\boxed{4}$　（１）１：１２　（２）１：１１：１３２　（３）$5\frac{5}{143}$度

（１）時計を１周するのにかかる時間の比が１２：１ですから，その逆比で１：１２です。



（２）右図のアとア＋イの大きさの比は，（１）より１：１２です。よって，ア：イ＝１：１１です。また，短針がイの角度を進む間に長針はウの角度を進むので，イ：ウ＝１：１２です。よって，ア：イ：ウ＝１：１１：１３２です。



（３）長針が２周する少し前に短針と位置を入れかえる場合，右図のようになって，やはりア：イ：ウ＝１：１１：１３２となります。このことから，ウの角度が小さい＝長針が短針の位置まで進むのに時計を周回する数が少ないときほど，アの角度が小さくなるので，早く交代可能な位置となるといえます。よって，２回目に短針と長針が交代可能な位置になるのは，右図のように長針が２周する少し前に短針と位置を入れかえる場合であることがわかります。このとき，時計の２周の角度＝７２０度が比のイ＋ウ＝１４３にあたることから，アの角度は$\frac{720}{143}=5\frac{5}{143}$（度）です。

$\boxed{5}$　（１）あ…１，い…１２，う…１２，え…１２　（２）$\frac{360}{143}$度　（３）１時１０$\frac{70}{143}$分

（４）１３２回

（１）解説省略

（２）１２倍分針の速さは毎分７２度ですから，$360\div(72-0.5)=\frac{720}{143}$（分）ごとに短針と１２倍分針は重なります。よって，$0.5\times\frac{720}{143}=\frac{360}{143}$（度）進むたびに１２倍分針と重なります。

（３）（２）より，短針は時計１周の$\frac{1}{143}$進むたびに長針と交代可能な位置にきます。よって，１３回目は$\frac{13}{143}=\frac{1}{11}$進んだときとなりそうです。ところが，短針が$\frac{1}{11}$進んだときには長針は$\frac{12}{11}$進んでいるので，$\frac{12}{11}-1=\frac{1}{11}$より，短針と重なってしまいます。よって，$\frac{14}{143}$進んだときを求めます。

$360\times\frac{14}{143}\div0.5=70\frac{70}{143}$（分）より，１時１０$\frac{70}{143}$分です。

（４）短針が時計１周の$\frac{1}{143}$，$\frac{2}{143}$，…，$\frac{143}{143}$を進んだときに交代可能な位置にきますが，そのうちで分子が１３の倍数である$\frac{13}{143}$，$\frac{26}{143}$，…，$\frac{143}{143}$のときは両針が重なります。よって，$143-11=132$（回）です。

$\boxed{6}$　（１）１２時$\frac{5}{143}$分　（２）２時$\frac{71}{143}$分　（３）９時から１０時の間，１２時から１時の間

（１）短針が時計の$\frac{12}{143}$を進んだとき，時間は$360\times\frac{12}{143}\div0.5=60\frac{60}{143}$（分）経過しているので，時刻は１時$\frac{60}{143}$分です。このとき，長針は１２の目盛りと１の目盛りの間にあるので針が交代した後の時刻は１２時台となります。また，短針は１２の目盛から$\frac{60}{143}\times0.5=\frac{30}{143}$（度）進んだところにあるので，長針がその位置にくるのは$\frac{30}{143}\div6=\frac{5}{143}$（分）となります。よって，１２時$\frac{5}{143}$分です。

（２）短針が時計の$\frac{13}{143}=\frac{1}{11}$を進んだとき，$\boxed{5}$より２つの針は重なっています。

よって，短針が時計の$\frac{14}{143}$を進んだときを考えます。時間は$360\times\frac{14}{143}\div0.5=70\frac{70}{143}$（分）経過しているので，時刻は１時$10\frac{70}{143}$分です。このとき，長針は２の目盛りと３の目盛りの間にあるので針が交代した後の時刻は２時台となります。また，短針は１２の目盛から$10\frac{70}{143}\times0.5=\frac{3000}{143}$（度）進んだところにあるので，長針がその位置にくるのは$\frac{3000}{143}\div6=3\frac{71}{143}$（分）となります。よって，２時$\frac{71}{143}$分です。

（３）（１）（２）より，１２時台なら順番に１時台，２時台，…，１１時台との間で両針が交代可能であり，１時台なら順番に１２時台，２時台，…，１１時台との間で両針が交代可能であることがわかります。このようにして，どの１時間においても交代後の時刻は１２時台，１時台，…，１１時台の順となり，両針が重なる場合が１回ずつ除かれるので，１１回あります。１００÷１１＝９余り１より，９時台の１回目ですから，交代可能な位置にあるのは９時から１０時の間，交代後の時刻は１２時から１時の間です。

$\boxed{7}$　（１）１２時$55\frac{5}{13}$分　（２）１時$50\frac{10}{13}$分　（３）１２回

（１）短針と長針が左右対称になるとき，よく知られているように□分の□は分母が１３の分数になります。$\frac{A}{143}$が約分によって分母１３の倍数になるのは，１４３＝１１×１３より，Ａが１１の倍数のときです。よって，短針が時計を１４３等分した目盛りのうち，１１の倍数の目盛りを進んだ場合を考えます。１回目は１１目盛り進んだ場合です。このとき，長針は１１×１２＝１３２（目盛り）進んでいます。１４３－１３２＝１１より，２つの針は左右対称になっています。

$360\times\frac{11}{143}\div0.5=55\frac{5}{13}$（分）より，１２時$55\frac{5}{13}$分です。

（２）短針が１１×２＝２２（目盛り）進んだ場合，長針は２２×１２＝２６４（目盛り）進んでいます。１４３×２－２６４＝２２より，２つの針は左右対称になっています。

$360\times\frac{22}{143}\div0.5=110\frac{10}{13}$（分）より，１時$50\frac{10}{13}$分です。

（３）以上より，分子が１１の倍数である$\frac{11}{143}$，$\frac{22}{143}$，…，$\frac{143}{143}$のときは両針が左右対称になります。そのうちで，分子が１３の倍数でもある$\frac{143}{143}$のときは交代可能な位置にないので，１３－１＝１２（回）です。

$\boxed{\text{別解}}$　１２時台，１時台，…，１１時台にそれぞれ１回ずつ左右対称になるので，１２回です。