最難関問題

ねじれた点移動

点Ａを中心とする円Ａと点Ｂを中心とする円Ｂがあり，円Ｂの面積は円Ａの面積の２倍です。２つの円は，図１のように直線ＡＢに対して垂直に上下に並んでいます。円Ａの円周上の点Ｐと円Ｂの円周上の点Ｑはそれぞれの円周上のある位置から同時に出発し，時計回りに一定の速さで進み，同時に１周してとまります。このとき，ＰＱを結ぶまっすぐな線が通過してできた図形をＸとします。

図形Ｘを直線ＡＢと垂直な面で切断すると，いろいろな大きさの円周ができます。その中で，最も小さい円周に囲まれた円の面積は，円Ａの面積の２分の１になりました。

以下の問いに答えなさい。なお，図２のように３辺の長さの比が３：４：５の三角形は直角三角形になります。

図１

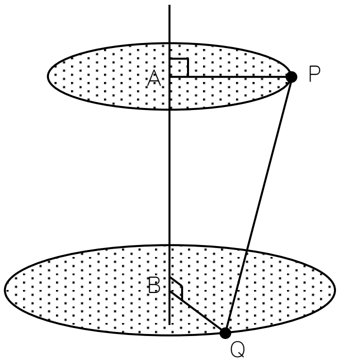
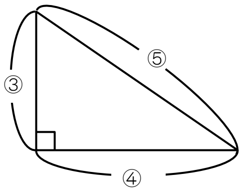


図２



（１）円ＡとＢを真上から見ると，点ＡとＢは重なっています。このとき，ＡＰとＢＱによってできる小さいほうの角の大きさは何度に見えますか。

（２）まっすぐな線ＰＱ上のＰとＱに重ならない位置に，点ＲとＳがあります。点ＰとＱが１周したとき，点Ｒが動いたあとの円周に囲まれた円の面積は円Ａと等しくなり，点Ｓが動いたあとの円周に囲まれた円の面積は円Ａの$\frac{25}{18}$倍になりました。ＰＲとＰＳの長さの比を求めなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

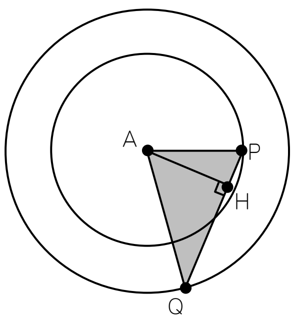
最難関問題

ねじれた点移動　（１）１０５度　（２）６：７

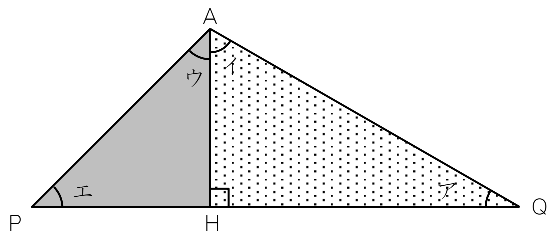
（１）図１を真上から見ると，図①のようになります。最も小さい円周は，点Ｈが動いたあととなります。真上から見える三角形ＡＰＱを拡大すると，図②になります。

（ＡＰを半径とする円の面積）:（ＡＨを半径とする円の面積）:（ＡＱを半径とする円の面積）＝２：１：４なので，１：４＝（１×１）:（２×２）より，ＡＨとＡＱの長さの比は１：２です。よって，図②のあみ目で示した直角三角形ＡＱＨは，角アの大きさが３０度，角イの大きさが６０度の直角三角形です。また，（ＡＨ×ＡＨ）:（ＡＰ×ＡＰ）＝１：２であることから，影をつけた直角三角形ＡＨＲは角ウとエの大きさが４５度の直角二等辺三角形です。

図①



図②

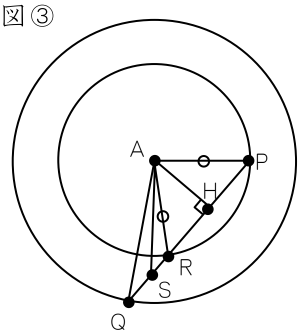


よって，真上から見ると，ＡＰとＢＱによってできる小さいほうの角の大きさは，
６０＋４５＝１０５（度）です。

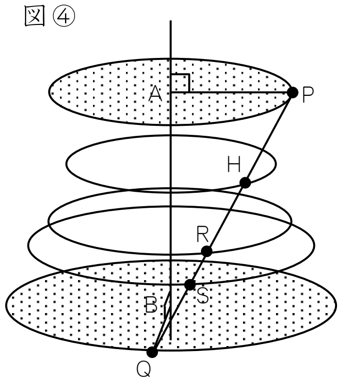
最難関問題

（２）真上から見るとだいたい図③のようになるので，見取り図では図④のようになります。また，図③の三角形ＡＰＱを拡大すると図⑤のようになります。ここで，
（ＡＨ×ＡＨ）:（ＡＰ×ＡＰ）:（ＡＳ×ＡＳ）＝９：１８：２５となるので，ＡＨ：ＡＳ＝３：５ですから，図⑤の斜線で示した直角三角形ＡＨＳは，ＡＨ：ＡＳ：ＨＲ＝３：５：４です。

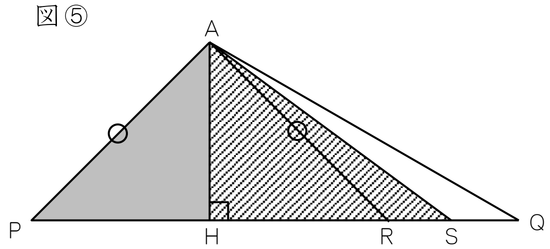
図③



図④



図⑤



よって，真上から見たときにＰＲ：ＰＳ＝（３×２）:（３＋４）＝６：７であり，これは実際のＰＲとＰＳの長さの比に一致します。