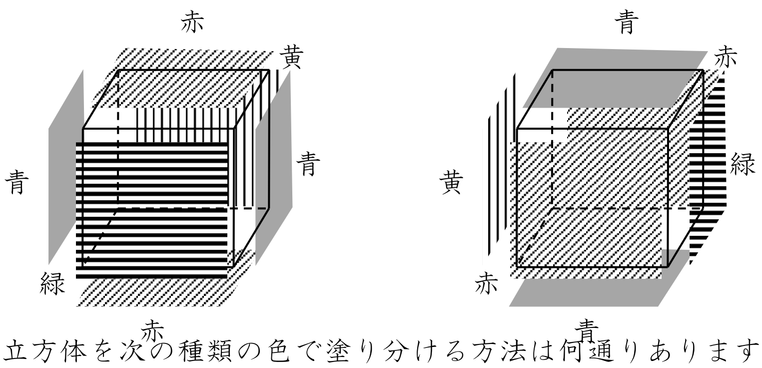
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

立方体・正八面体の塗り分け

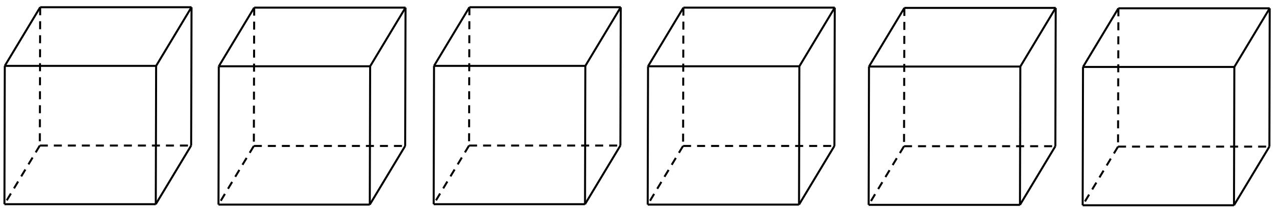
立体の表面を，何色かで塗り分けます。となりあう面（辺を共有する面）は異なる色で塗ります。向きを変えることで重なる場合は同じ塗り分け方になるので，たとえば下の２つは同じ塗り分け方です。



（１）立方体を次の種類の色で塗り分ける方法は何通りありますか。

①　５色

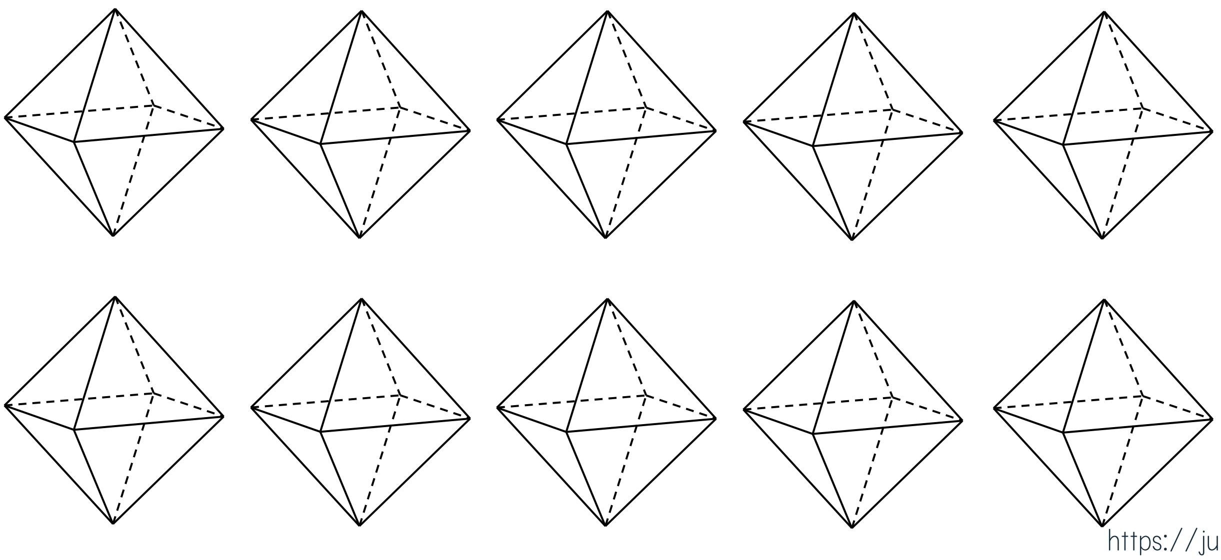
②　４色



（２）正八面体を次の種類の色で塗り分ける方法は何通りありますか。

①　７色

②　６色



受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

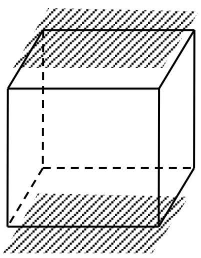
立方体・正八面体の塗り分け　（１）①１５通り　②６通り　（２）①３３６０通り　②３１２０通り

（１）

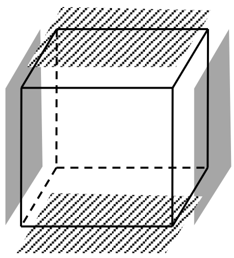
①　図①のように５色から１色を選んで，向かい合う面を同じ色で塗ります。残りの４つの面の色のぬり方は４×３×２×１（通り）ですが，上下を保ったままで回転させると４通りの塗り方が同じになり，上下をひっくり返すと２通りのぬり方が同じになる（つまり数珠順列）ので，
５×４×３×２×１÷４÷２＝１５（通り）です。

②　図②のように４色から２色を選んで，向かい合う２組の面を同じ色で塗ります。残った２色で残りの２面を塗る方法は１通りなので，４Ｃ２×１＝$\frac{4\times3}{2\times1}$×１＝６（通り）です。

図①



図②



（２）

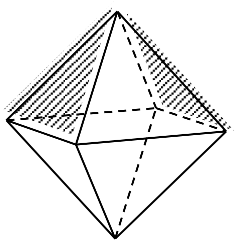
①　図③のように頂点を１個共有する２つの面を同じ色で塗る方法をＡ，図④のように頂点を共有しない向かい合う２つの面を同じ色で塗る方法をＢを呼ぶことにします。

Ａの場合，２つの面を塗る色の選び方が７通り，残り６つの面のぬり方は
６×５×４×３×２×１÷２（通り）なので，７×６×５×４×３×２×１÷２＝２５２０（通り）です。

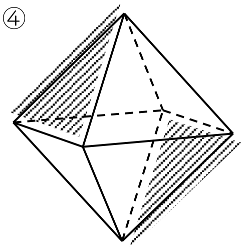
Ｂの場合，２つの面を塗る色の選び方が７通り，残り６つの面のぬり方は
６×５×４×３×２×１（通り）を同じ色で塗る向かい合う面を軸にした回転で３通りが同じになり，同じ色で塗る向かい合う面をひっくり返して２通りが同じになるので，
６×５×４×３×２×１÷６（通り）です。よって，
７×６×５×４×３×２×１÷６＝８４０（通り）です。

以上より，２５２０＋８４０＝３３６０（通り）です。

図③



図④



最難関問題

（２）

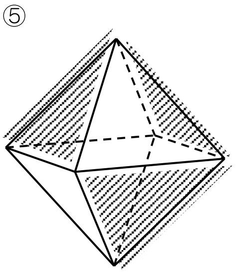
②　６色の場合，１つの色で３面を塗り，残り５色で５面を塗る方法と，２つの色で２面ずつ塗り，残り４色で４面を塗る方法があります。

■１つの色で３面を塗り，残り５色で５面を塗る場合

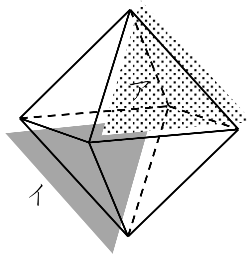
図⑤のように，同じ色の３面は互いにＡの位置関係となる１通りの選び方のみがあります。続いて図⑥のア，イの２面に色を塗ると，残りの３面についてはアとイの面を軸として回転させると３通りが同じになるので，３×２×１÷３＝２（通り）の塗り方があります。

よって，６×５×４×２＝２４０（通り）です。

図⑤



図⑥



■２つの色で２面ずつ塗り，残り４色で４面を塗る場合

ＡＡ，ＢＢ，ＡＢの３パターンがあります。

ＡＡ

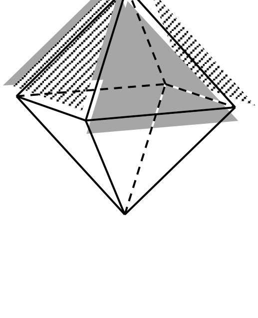
図⑦～⑪の５タイプがあります。

図⑦～⑨はどれも，６Ｃ２×４×３×２×１÷２＝１８０（通り），１８０×３＝５４０（通り）です。

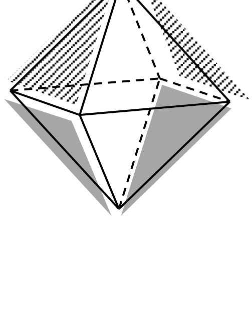
図⑩，⑪は似ていますが，向きを変えても重なりません（立体の異性体）。

どちらも６×５×４×３×２×１＝７２０（通り）なので，７２０×２＝１４４０（通り）です。

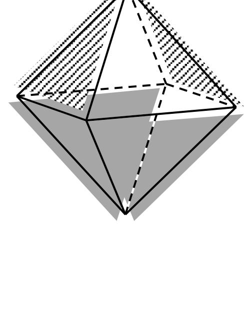
図⑦



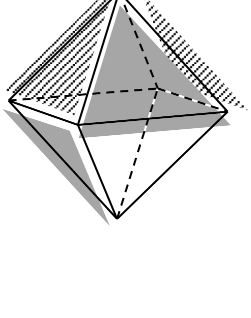
図⑧



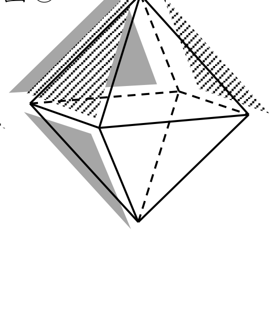
図⑨



図⑩



図⑪



最難関問題

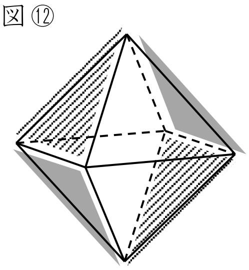
ＢＢ

図⑫の１タイプのみとなります。６Ｃ２×４×３×２×１÷２＝１８０（通り）です。

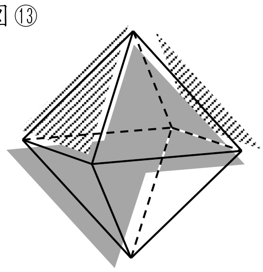
ＡＢ

図⑬の１タイプのみとなります。６×５×４×３×２×１＝７２０（通り）です。

図⑫



図⑬



以上より，２４０＋５４０＋１４４０＋１８０＋７２０＝３１２０（通り）です。