

最難関問題

回文分数パズル

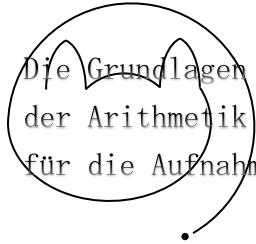
$3\frac{1}{3}$, $3\frac{21}{23}$ のような帯分数の既約分数で、整数部分-分子-分母の順に数を並べると、3 1 3, 3 2 1 2 3と、左から読んでも右から読んでも同じになる分数を、回文分数とよぶことにします。また、 $3\frac{1}{3}$ では現れる数字の和は $3 + 1 + 3 = 7$ 、 $3\frac{21}{23}$ では現れる数字の和は $3 + 2 + 1 + 2 + 3 = 11$ になると考えます。

(1) 10より大きく100未満の回文分数について、次の条件を満たす最も小さいものと最も大きいものを答えなさい。きまらない場合は、「きまらない」と答えなさい。

- ① 現れる数字の和が4
- ② 現れる数字の和が5
- ③ 現れる数字の和が6

(2) 10より大きく100未満の回文分数について、次の条件を満たす最も大きいものと2番目に大きいものを答えなさい。きまらない場合は、「きまらない」と答えなさい。

- ① 現れる数字の和が36
- ② 現れる数字の和が39



最難関問題

回文分数パズル

(1) ① $10\frac{1}{101}$, $10\frac{100}{101}$ ② $10\frac{1}{1101}$, $11\frac{1}{11}$ ③ きまらない, $21\frac{1}{2}$

(2) ① $98\frac{100}{189}$, $98\frac{11}{89}$ ② $99\frac{11}{199}$, きまらない

(1)

① 10より大きい帯分数なので、最小の回文分数については整数部分が10である場合を考えます。

$10\frac{\square}{\square 1}$ の□をあわせた部分の最後には0が入り、 $\square 0$ となります。0の前の空いた部分

には、左から読んでも右から読んでも同じに見える整数である、「回文数」が入ります。また、分子の一番上の位には0以外の数字が入るので、①では $4 - 1 \times 2 = 2$ であることから、2か1が入ります。

$10\frac{2}{\square 1}$ の場合、残った部分には0のみが入るので、分母は1にきまるので、分子は分母より大き

くなってしまい、帯分数になりません。

$10\frac{1}{\square 1}$ の場合、残った部分には1が1個と0がいくつか入ります。分母は分子より大きくならな

ければならないことから、 $10\frac{1}{\square 101}$ となり、残りの部分には0が入ります。よって、分母は

101 にきまります。最小は0をこれ以上入れない $10\frac{1}{101}$ です。

次に最大の場合を考えます。整数部分の数字の和を2にすると、 $20\frac{\square}{\square 2}$ や $11\frac{\square}{\square 11}$ となるのですが、残りの部分には0しか入らないのでうまくいきません。よって、整数部分は10となりますから、

上で考えた $10\frac{1}{\square 101}$ の残りに0を入れる場合を考えて、 $10\frac{100}{101}$ です。

最難関問題

② ①と同様に考えて、最小は $10\frac{1}{1101}$ 、最大は $11\frac{1}{11}$ です。

③ 最小の場合、①で考えた $10\frac{1}{101}$ の残りに、数字の和が $6 - 1 \times 4 = 2$ となるように回文数を

入れます。この場合、回文数 $100\dots001$ を分母に入れて $10\frac{1}{100\dots001101}$ とすることで
いくらでも小さい分数を作ることができます。よって、 10 より大きい範囲では、最小の回文分数は決まりません。

最大の場合、 $21\frac{1}{2}$ です。

(2)

① 整数部分を 99 とすると、 $99\frac{\square}{\square 9}$ の残りには 9 が 1 つと 0 がいくつか入るだけなので、帯分数

になりません。 98 の場合、 $98\frac{\square}{\square 9}$ の残りには 8 が 1 つ入るので、 8 は分母に入って、 $98\frac{\square}{89}$

となります。残りには 2 が 1 つか 1 が 2 つと、 0 がいくつか入ります。

よって、最大の回文分数は $98\frac{100}{189}$ 、 2 番目は $98\frac{11}{89}$ です。

② ①と同様に考えて、最大の回文分数は $99\frac{11}{199}$ です。 2 番目は、 $99\frac{3}{99}$ は既約分数ではないの

で、 $99\frac{1}{1199}$ になりそうです。しかし、ここで 0 を使うと $99\frac{10}{10199}$ や $99\frac{100}{100199}$ を

作ることができます。これらは、分子を 1 にそろえると $99\frac{1}{1019.9}$ や $99\frac{1}{1001.99}$ となるの

で、 $99\frac{1}{1199}$ より大きくなります。このように 0 の個数を増やすほど大きい分数を作ることがで

きますが、それらはすべて $99\frac{11}{199}$ より小さい分数です。よって、 2 番目はきまりません。