

最難関問題

多角数と倍数の性質

下の図1のきまりにしたがって並ぶご石の数を、三角数といいます。1番目の三角数は1，2番目の三角数は3，3番目の三角数は6，4番目の三角数は10です。ご石の代わりにマスを使うと，階段の形で表せます。図2は四角数，図3は五角数を表しており，それぞれマスを使って階段の形に並べかえると，四角数は上の段と下の段のマスの個数の差が2，五角数は3になります。同様にして，六角数では差が4，七角数では5，…，N角数では $N - 2$ になります。

図1

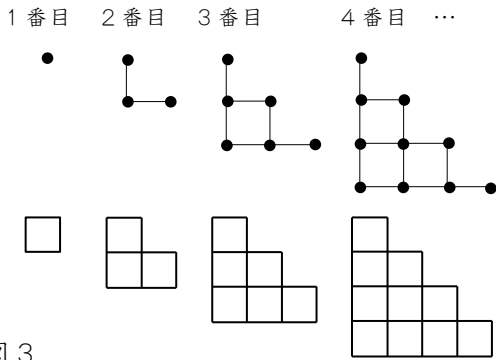


図2

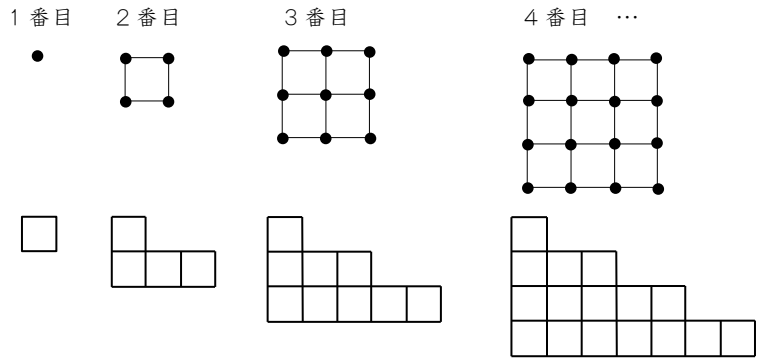
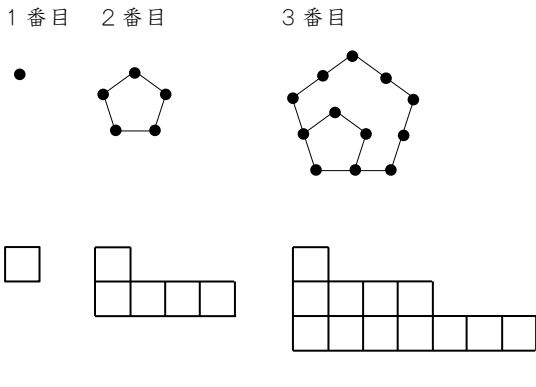


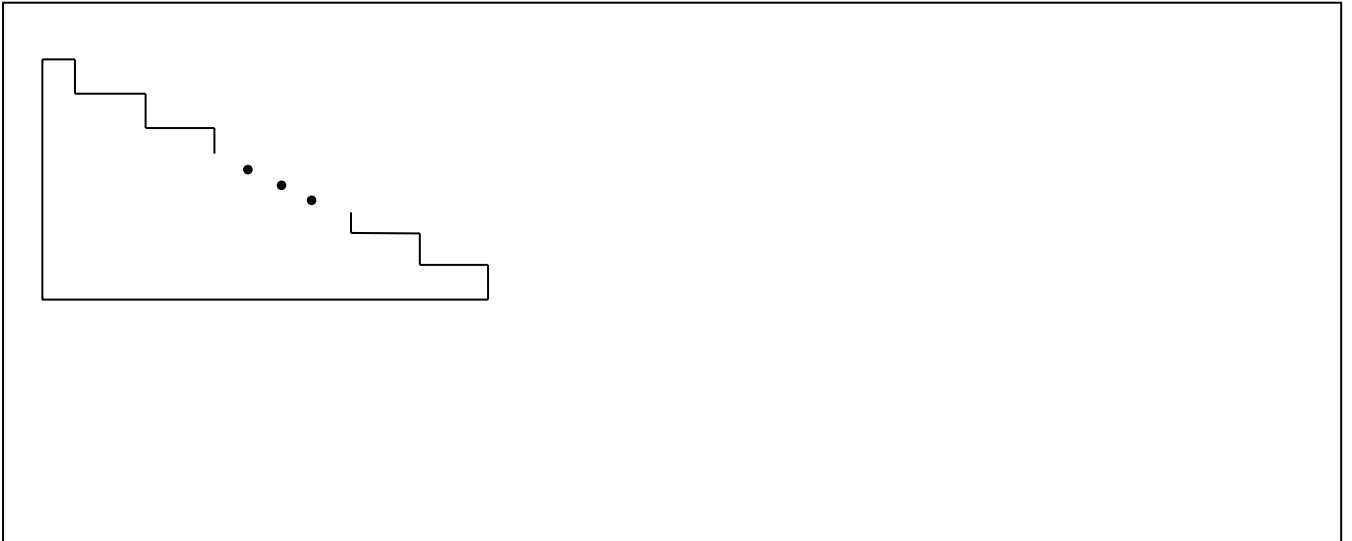
図3



(問題は次のページから始まります)

最難関問題

- (1) \square を奇数とします。すべての \square 番目の N 角数は \square の倍数であることを，下の図を利用して説明しなさい。



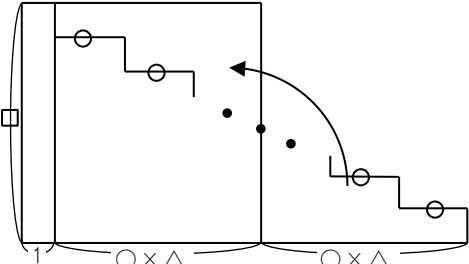
- (2) 9番目の N 角数が平方数になるとき， N にあてはまる整数を小さい順に 3 つ答えなさい。

- (3) 7番目の N 角数が平方数になるとき， N にあてはまる整数を小さい順に 4 つ答えなさい。

最難関問題

多角数と倍数の性質 (1) 解説参照 (2) 4, 8, 14 (3) 4, 11, 39, 60

(1) 以下は解答例です。



○ = $N - 2$, $\Delta \times 2 + 1 = \square$ とすると, 図のように縦が \square で横が $\circ \times \Delta + 1$ の長方形にマスを並びかえることができるから。

(2) 9番目の多角数は9の倍数であり, 9は平方数なので, 9の倍数が平方数になるのは, ある整数Mについて, $9 \times M \times M$ という形で表すことができる場合です。(1)の解説の図で考えると, $\circ \times \Delta + 1$ が平方数 $M \times M$ になればよいことになります。9番目であることから, $\Delta = (9 - 1) \div 2 = 4$ なので, 三角数から順に $\circ \times 4 + 1$ を求めていきます。

三角数... $(3 - 2) \times 4 + 1 = 5$

四角数... $(4 - 2) \times 4 + 1 = 9$...よって, $N = 4$

五角数... $(5 - 2) \times 4 + 1 = 13$

...

という等差数列になるので, 六角数以降は17, 21, 25, 29, 33, 37, 41, 48, 49, ...となります。よって, 4のときの $N = 4$, 25のときの $N = 8$, 49のときの $N = 14$ が答えとなります。

最難関問題

(3) 7番目の多角数は7の倍数なので、それが平方数になるのは、ある整数Mについて、 $7 \times 7 \times M \times M$ となる場合です。(1)の解説の図で考えると、 $\bigcirc \times \triangle + 1$ が $7 \times M \times M$ になればよいことになります。

7番目であることから、 $\triangle = (7 - 1) \div 2 = 3$ なので、三角数から順に $\bigcirc \times 3 + 1$ を求めていきます。

$$\text{三角数} \cdots (3 - 2) \times 3 + 1 = 4$$

$$\text{四角数} \cdots (4 - 2) \times 3 + 1 = 7 \quad \cdots \text{よって、} N = 4$$

$$\text{五角数} \cdots (5 - 2) \times 3 + 1 = 10$$

...

という等差数列になります。六角数以降は13, 16, 19, ...となるので、3の倍数に1を加えた数が並びます。よって、 $7 \times M \times M$ であり、3の倍数+1でもあるような数を探せばよいことになります。

$7 \times 1 \times 1 = 7$ 、これは上で求めた $N = 4$ の場合です。続いて $7 \times 2 \times 2 = 28$ が条件を満たし、

$7 \times 3 \times 3 = 63$ は条件を満たさず、 $7 \times 4 \times 4 = 112$ 、 $7 \times 5 \times 5 = 175$ が条件を満たします。

28の場合、 $3 + (28 - 4) \div 3 = 11$ より $N = 11$ 、

112の場合、 $3 + (112 - 4) \div 3 = 39$ より $N = 39$ 、

175の場合、 $3 + (175 - 4) \div 3 = 60$ より $N = 60$ なので、

Nは小さい順に、4, 11, 39, 60です。