受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

三角形と区域

　三角形をいくつか重ねて，辺に囲まれた部分の個数を数えます。例えば２個の三角形を図１のように重ねると２個，図２のように重ねると３個，図３のように重ねると５個の部分ができます。

図１

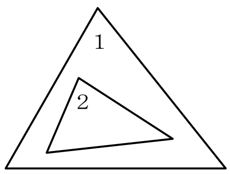


図２

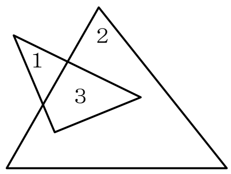
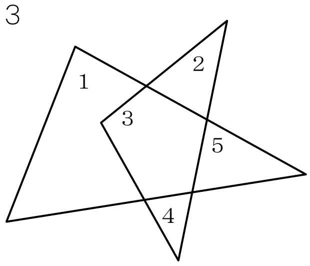


図３



（１）三角形を２個重ねるとき，もっとも多くて何個の部分ができますか。

（２）三角形を３個重ねるとき，もっとも多くて何個の部分ができますか。

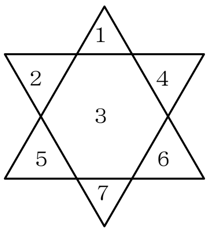
（３）三角形をいくつか重ねたところ，辺に囲まれた部分が４００個になりました。三角形は最も少なくて何個ですか。

最難関問題

三角形と区域　（１）７個　（２）１９個　（３）１３個

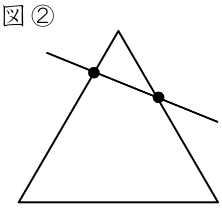
（１）図①のように重ねたときの，７個です。

図①



（２）いろいろと三角形を重ねながら，辺に囲まれた部分が最大になる条件を考えます。図②のように，すでにある三角形に対して直線を１本引くとき，交点は最大で２個できます。よって，三角形が２個あるとき，新たに引く直線と三角形の辺の交点が，２×２＝４（個）になるようにします。

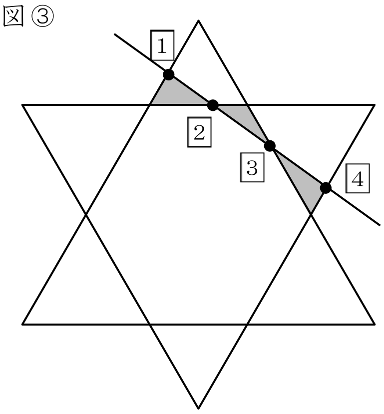
図②



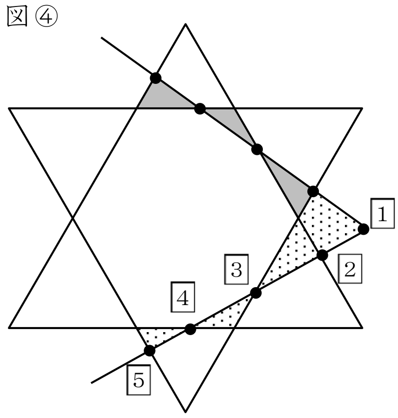
まず，図③のように１本目の直線を引くことで，辺に囲まれた部分は３個増えます。このとき，交点に$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$と番号を振って順に考えると，$\boxed{2}$個目の交点以降，交点ができるたびに辺に囲まれた部分ができていきます。

２本目の直線を図④のように引くと，辺に囲まれた部分は４個増えます。というのも，２本目の直線を引くことでできる交点は，すでにある三角形との４個の交点に加えて，１本目の直線とも１個の交点ができるからです。３本目の直線を図⑤のように引くと，交点が６個できるので，辺に囲まれた部分は５個増えます。

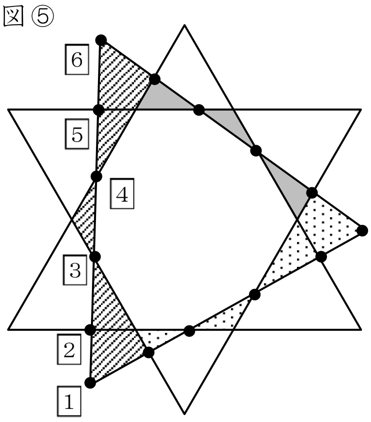
図③



図④



図⑤



こうして，辺に囲まれた部分は３＋４＋５＝１２（個）増えるので，７＋１２＝１９（個）です。

最難関問題

（３）辺に囲まれた部分ができるだけ多くなるようにすると，三角形を４個重ねるとき，１本目の直線はすでにある三角形の辺と，２×３＝６（個）の交点ができ，２本目の直線は６＋１＝７（個），３本目の直線は６＋１＋１＝８（個）の交点ができるので，辺に囲まれた部分は（６－１）＋（７－１）＋（８－１）＝５＋６＋７＝１８（個）増えます。５個重ねるときは，１本目の直線はすでにある三角形の辺と，２×４＝８（個）の交点ができるので辺に囲まれた部分は８－１＝７（個）増えるため，直線を３本引くと７＋８＋９＝２４（個）辺に囲まれた部分が増えます。

三角形（個）	1	2	3	4	5
囲まれた部分（個）	1	7	１９	３７	６１
差（個）		6	１２	１８	２４

こうして，囲まれた部分の差は６，１２，１８，２４，…と，６の倍数を順番に並べたものになりますから，三角形を□個重ねたときの辺に囲まれた部分の個数の最大値は，
１＋｛１＋２＋３＋…＋（□－１）｝×６，つまりは１＋（□－１番目の三角数）×６によって求めることができます。

１＋（□－１番目の三角数）×６＝４００とすると，１＋（□－１番目の三角数）×６＝３９９なので，３９９÷６＝６６.５であり，６６.５を超える最初の三角数は，
１＋２＋３＋…＋９＋１０＋１１＝６６，１＋２＋３＋…＋１０＋１１＋１２＝７８より，
□－１＝１２，□＝１３となるので，三角形は１３個重ねます。