最難関問題

切手の問題（剰余類）と不定方程式

ある県では，４３３年と１３０１年に生まれたとされる地元の偉人を記念して，４３３円切手と１３０１円切手を発行しました。

（１）この２種類の切手をどのように組み合わせても作ることができない金額のうちで，最も高いのは何円ですか。ただし，一方の切手のみを用いてもよいものとします。

（２）この２種類の切手を組みあわせたところ，３３３０１２円になりました。４３３円切手と１３０１円切手はそれぞれ何枚ですか。

最難関問題

切手の問題（剰余類）と不定方程式　（１）５６１５９９円　（２）６６枚，２３４枚

（１）切手の組み合わせの典型問題です。剰余類の考えを用いて，解くことができます。まず，すべての整数を４３３で割った余りごとに下の図のように並べます。１３０１を４３３で割ると余りは２になるので，１３０１は２の段に入ります。

1	1	434									
2	2	435	…	1301							
3	3	436									
4	4	437			…	1301×2					
5	5	438									
6	6	439					…	1301×3			
…							…				
432	432	865									
0	433	866							…	1301×433	

〇で囲った数は，表のそれぞれの段において，初めて４３３円切手か１３０１円切手を用いて作ることができる金額です。〇で囲った数の右側に並ぶ数は，４３３を次々と加えていくことで作ることができます。〇で囲われる最大の数は１３０１×４３２であり，そのすぐ左の数が，作ることができない最大の金額にあたります。よって，１３０１×４３２－４３３＝４３２×１３００－１＝５６１５９９(円)です。

最難関問題

（２）式で表すと，４３３×□＋１３０１×△＝３３３０１２を満たす整数（□，△）の組を探すことになります。ここでよく用いられる工夫は，４３３，１３０１，３３３０１２のすべてか少なくとも３つに共通する約数を求めることですが，実はこの３つの数は互いに素なので，うまくいきません。また，１の位に注目する方法も（おそらく）あまり役に立ちません。そこで，（１）で用いた剰余類の発想を活用します。

　１３０１は４３３で割って２余る数です。４３３で割って２余るすべての数は，２倍すると４３３で割って２×２＝４余る数になり，３倍すると２×３＝６余る数になります。３３３０１２は４３３で割ると３５余る数であり，この余りの部分は１３０１によってしか作ることができません。

　右の図のように２を２１６倍して余りが４３２になると，次は２を２１７倍して余りが１になります。よって，余りが３５になるのは，
（４３３＋３５）÷２＝２３４より，２を２３４倍したときです。
　このことから，△＝２３４であることがわかります。
３３３０１２－１３０１×２３４＝２８５７８，
２８５７８÷４３３＝６６より，□＝６６です。