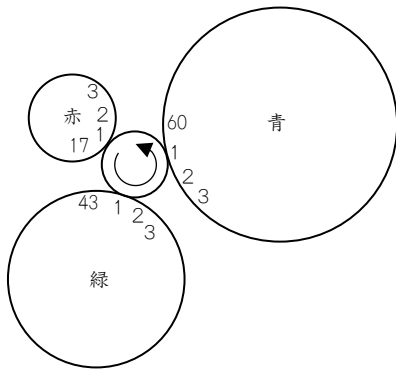


最難関問題

歯車式カレンダー

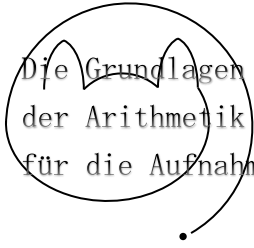
ある惑星には月（衛星）が3つあり、それぞれ赤い月、青い月、緑の月と呼ばれています。赤い月は17日ごと、青い月は60日ごと、緑の月は43日ごとに満月になります。この惑星に住む人々は、この3つの月の周期によって暦を表すために、下の図のような装置を利用しています。

この装置では、それぞれの月を表す歯車を中央の歯車に組み合わせ、毎日矢印の向きに中央の歯車を歯1つ分動かします。赤い月の歯車の歯数は17、青い月の歯車の歯数は60、緑の月の歯車の歯数は43で、それぞれの歯には1から順に整数の番号がついています。ただし、緑の月は「縁起が悪い」とされているため、数字の向きがほかの歯車とは逆向きになっています。中央の歯車に1の歯がかみあうときにその月は満月になります。



図のように3つの月が満月になった日を1日目とします。次の問いに答えなさい。

- (1) 赤い月の歯車の3の歯と、青い月の歯車の30の歯が初めて同時に中央の歯車にかみあうのは、何日目ですか。
- (2) 赤い月の歯車の3の歯、青い月の歯車の30の歯、緑の月の歯車の39の歯が初めて同時に中央の歯車にかみあうのは、何日目ですか。



最難関問題

歯車式カレンダー (1) 870日目 (2) 30450日目

歯車式のカレンダーは、マヤ文明で使われていたそうです。

(1) 青の歯車の30の歯が初めて中央の歯車とかみあうとき、 $30 \div 17 = 1$ 余り13より、赤の歯車の13の歯が中央の歯車とかみあっています。これ以降、青の歯車の30の歯は60日ごとに中央の歯車とかみあいます。 $60 \div 17 = 3$ 余り9より、そのときに中央の歯車とかみあう赤の歯車の歯は、 $13 + 9 - 17 = 5$ 、 $5 + 9 = 14$ 、 $14 + 9 - 17 = 6$ 、…と変化していきます。

60も9も17と互いに素なので、この13, 5, 14, 6, …という周期は1から17までの整数が1回ずつ現れる17個の数の周期になります。また、 $9 \times 2 = 18$ は17より1大きいため、13, 5, 14, 6, …においては1つおきに数が1つずつ大きくなります。したがって、この周期が繰り返されることを考えると、3, 12, 4, 13, 5, 14, 6, …となります。13から出発すると、3は15番目の数なので、 $30 + 60 \times 14 = 870$ (日目) です。

(2) 870日目に中央の歯車とかみあう緑の歯車の歯を求めると、 $870 \div 43 = 20$ 余り10より、1の歯から数えて10日目の歯なので、 $1 + 43 - 9 = 35$ の歯です。

さて、870日目の次に赤い歯車の3の歯と青い歯車の30の歯が中央の歯車とかみあうのは、17と60の最小公倍数である、 $17 \times 60 = 1020$ (日) ごとです。 $1020 \div 43 = 23$ 余り31ですから、中央の歯車とかみあう緑の歯車の歯は31ずつ小さくなります。 $43 - 31 = 12$ より、これは12ずつ大きくなることと同じなので、35, 4, 16, 28, 40, 9, 21, 31, 2, 14, …となります。ここで、□で囲った4個ずつの周期に注目します。 $12 \times 4 - 43 = 5$ より、□の周期の最初の数は5ずつ大きくなっていくので、周期を $(39 - 4) \div 5 = 7$ (回) 繰り返した8回目の周期の最初の数が39になります。39は35から数えると、 $4 \times 7 + 1 = 29$ (個) 進んだ数なので、 $870 + 1020 \times 29 = 30450$ (日目) です。