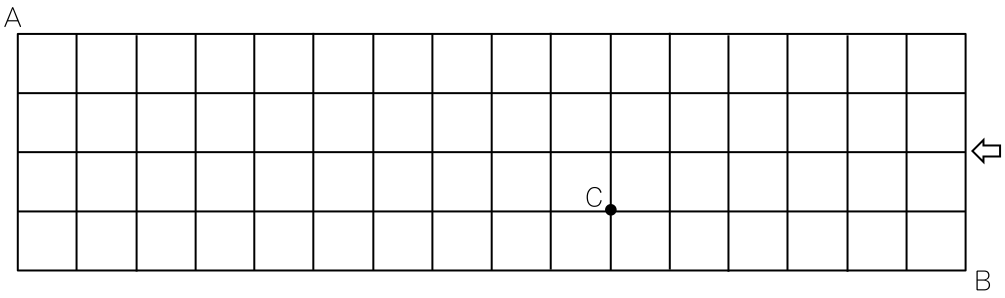
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

道順と２０２５

　下図の縦（たて）４行・横１６列のマス目において，左上の頂点Ａから右下の頂点Ｂにむけて，線の上を遠回りすることなく進みます。ただし，きめられたある頂点を途中で必ず通ることにします。



（１）頂点Ｃを通ってＡからＢまで進む道順は，何通りありますか。

（２）頂点Ｄは上から３段目の，⇦の直線上にあります。頂点Ｄを通ってＡからＢまで進む道順が２０２５通りあるとき，ＡからＤまで進む道順は何通りありますか。考えられるものをすべて答えなさい。

（３）頂点Ｅを通ってＡからＢまで進む道順が１３６５通りあるとき，ＡからＥまで進む道順は何通りありますか。考えられるものをすべて答えなさい。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

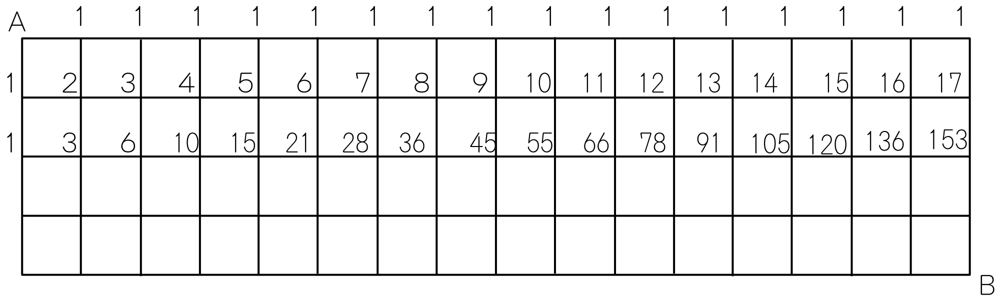
最難関問題

道順と２０２５

（１）２００２通り　（２）４５通り　（３）１通り，１５通り，９１通り，１３６５通り

（１）ＡからＣに進む道順は，１３Ｃ３＝$\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}$＝２８６（通り），ＣからＢに進む道順は，７Ｃ１＝７（通り）なので，２８６×７＝２００２（通り）です。

（２）Ａから⇦の直線上の頂点までの道のりは，下のように三角数になります。また，ＤからＢまでの道のりも同じように三角数になります。このとき，（ＡからＤまでの道のり）×（ＤからＢまでの道のり）は，１×１５３，３×１３６，６×１２０，１０×１０５，…と三角数の積になっていきます。積は順に大きくなっていき，また，２０２５は４５×４５の平方数であることから，ＡからＤまで進む道順は４５通りです。

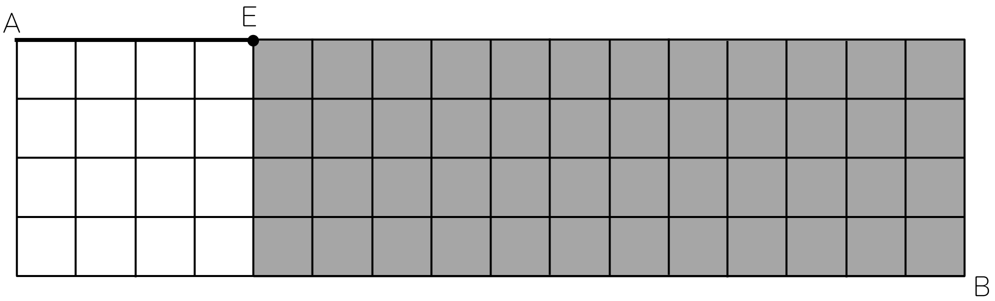


最難関問題

（３）Ｅが１段目，２段目，３段目にある場合に分けて考えます。４段目にある場合は２段目と同じ，５段目は１段目と同じになります。

Ｅが１段目にある場合

　ＡからＥまでの道順は１通りで，ＥからＢまでの道順は（□Ｃ４）通りとなります。
ＡＥの長さが１マス分の場合，ＥからＢまでの道順は１９Ｃ４，
ＡＥの長さが２マス分の場合，ＥからＢまでの道順は１８Ｃ４，
…，
ＡＥの長さが１５マス分の場合，ＥからＢまでの道順は５Ｃ４，です。



$$□C4=\frac{□\times(□-1)\times(□-2)\times(□-3)}{4\times3\times2\times1}=1365=3\times5\times7\times13,$$

$$□\times(□-1)\times(□-2)\times(□-3)=2\times2\times2\times3\times3\times5\times7\times13,$$

となるので，２×２×２×３×３×５×７×１３をうまく組み合わせて４つの連続する整数の積の形にすると，１５×１４×１３×１２にできるので，□＝１５でＡＥの長さは５マス分です。このときのＡＥ間の道順は１通りです。また，進み方をひっくり返して，Ｅが５段目でＥＢの長さが５マス分の場合は，ＡＥ間の道順は１５Ｃ４＝１３６５（通り）になります。よって，１通りと１３６５通りです。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

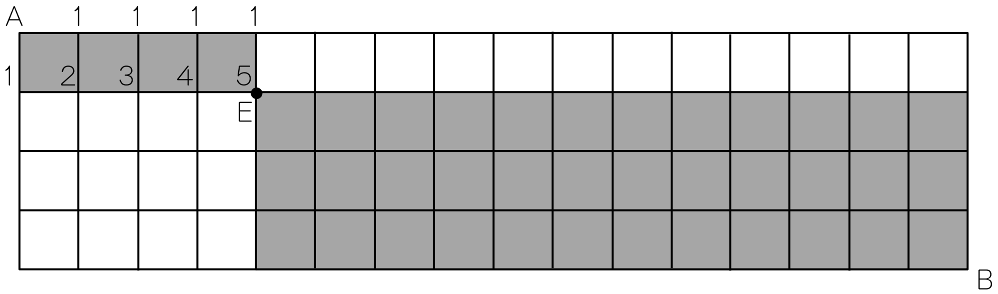
最難関問題

Ｅが２段目にある場合

ＡからＥまでの道順は１，２，３，４，５，…通りで，ＥからＢまでの道順は（□Ｃ３）通りとなります。

ＡＥ間が１通りの場合，ＥＢ間は１９Ｃ３で，１×１９Ｃ３（通り），

ＡＥ間が２通りの場合，ＥＢ間は１８Ｃ３で，２×１８Ｃ３（通り），…



これらの式は，（２０－□）×□Ｃ３と表せます。（２０－□）×□Ｃ３＝１３６５のとき，

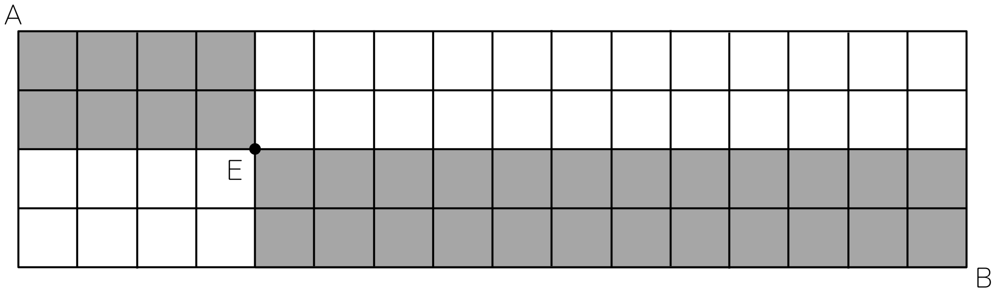
$$(20-\square)\times\frac{\square\times(\square-1)\times(\square-2)}{3\times2\times1}=3\times5\times7\times13,$$

$$(20-\square)\times\square\times(\square-1)\times(\square-2)=2\times3\times3\times5\times7\times13,$$

となりますが，式の右辺をうまく組み合わせて左辺の形にすることは不可能です。

Ｅが３段目にある場合

ＡからＥ，ＥからＢまでの道順はがどちらも（□Ｃ２）通りという三角数の値となります。



このとき，□Ｃ２×（２０－□）Ｃ２＝１３６５となればよいので，

$$\frac{\square\times(\square-1)}{2\times1}\times\frac{(20-\square)\times(20-\square-1)}{2\times1}=3\times5\times7\times13,$$

$$\square\times(\square-1)\times(20-\square)\times(19-\square)=2\times2\times3\times5\times7\times13,$$

$$\square\times(\square-1)\times(20-\square)\times(19-\square)=6\times5\times14\times13,$$

とできるので，□は６か１４です。よって，６Ｃ２＝１５（通り），１４Ｃ２＝９１（通り）です。