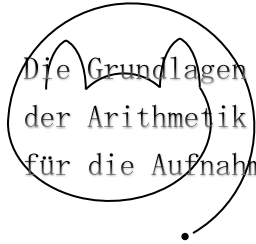


連続する整数と剰余

(1, 2, 3, 4), (9, 10, 11, 12, 13, 14, 15) のように、連続する整数がいくつか並んだ列があります。連続する整数の列の中で、3で割って2余る数は2つあり、4で割って1余る数と3余る数は1つずつあり、5で割って1余る数と2余る数は1つずつあり、16で割って11余る数は1つあるものについて、以下の問いに答えなさい。

(1) このような連続する整数の列の中で、列に含まれる整数が300以上333以下であるものを、すべて答えなさい。

(2) このような連続する整数の列に含まれる7の倍数のうち、小さい方から33番目のものを答えなさい。



連続する整数と剰余

- (1) (314, 315, 316, 317), (314, 315, 316, 317, 318),
 (328, 329, 330, 331, 332), (329, 330, 331, 332),
 (2) 651

(1) 3で割って2余る数が2つあるということは、6で割って2余る数が1つと、6で割って2+3=5余る数が1つあるということです。

また、4で割って1余る数と3余る数が1つずつあるという条件と、16で割って11余る数が1つあるという条件をあわせると、16は4の倍数であり、 $11 \div 4 = 2$ 余り3であることから、「16で割って9余る数と11余る数が1つずつあり、余りが奇数になる数は他にはない」か、「16で割って11余る数と13余る数が1つずつあり、余りが奇数になる数は他にはない」のいずれかが満たされればよいことになります。

$\div 6$ の剰余で2と5を含む最小の列は、 $\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$ と $\langle 5, 0, 1, 2 \rangle$ です。また、 $\div 16$ の剰余で9と11か11と13を含む最小の列は、 $\langle 9, 10, 11 \rangle$ と $\langle 11, 12, 13 \rangle$ です。例えば $\langle 2, 3, 4, 5 \rangle$ と $\langle 9, 10, 11 \rangle$ を組み合わせると、図①、②等ができます。図①の場合は、 $\div 16$ の剰余において余計な奇数が含まれてしまうので、条件を満たしません。図②の場合は、条件に反することなく図③のように5つの剰余の列まで広げることができます。

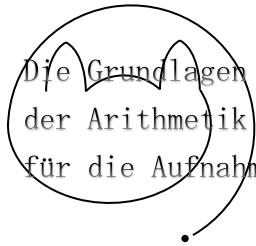
図①

$\div 6$ の剰余...	2	3	4	5	➡	$\div 6$ の剰余...	2	3	4	5	
$\div 16$ の剰余...	9	10	11			$\div 16$ の剰余...	9	10	11	12	13

図②

$\div 6$ の剰余...	2	3	4	5	➡	$\div 6$ の剰余...	2	3	4	5	0
$\div 16$ の剰余...	9	10	11			$\div 16$ の剰余...	8	9	10	11	12

図③



最難関問題

同様にして図④～⑥の列を考えることができます。

図③

÷6の剰余… 2 3 4 5 0
 ÷16の剰余… 8 9 10 11 12

図④

÷6の剰余… 2 3 4 5 0
 ÷16の剰余… 10 11 12 13 14

図⑤

÷6の剰余… 4 5 0 1 2
 ÷16の剰余… 8 9 10 11 12

図⑥

÷6の剰余… 4 5 0 1 2
 ÷16の剰余… 10 11 12 13 14

図③～⑥はすべて5つの剰余の列ですから、÷5の剰余である0, 1, 2, 3, 4をちょうど1つずつ含みます。

また、図③と図⑥は図⑦のようにつなげてとらえることができます。

図⑦

÷6の剰余… 2 3 4 5 0 1 2
 ÷16の剰余… 8 9 10 11 12 13 14

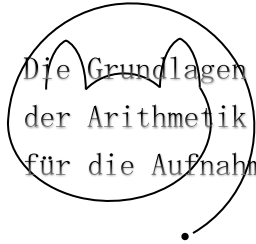
図⑦の場合、6で割ったときの余りが0の数、つまりは6の倍数が16で割ると12余る数になっているので、条件を満たす最小の整数は12で、以降は6と16の最小公倍数である48を加えていくので、48の倍数+12となります。

同様に、図④の場合、6の倍数が16で割ると14余る数になっているので、条件を満たす最小の整数は30なので、48の倍数+30となります。図⑤の場合、6で割り切れる数が16で割ると10余る数になっているので、条件を満たす最小の整数は42なので、48の倍数+42となります。これらの数のうちで300～333のあたりにある数を探すと、 $48 \times 6 = 288$ 、 $48 \times 7 = 336$ より、 $288 + 12 = 300$ 、 $288 + 30 = 318$ 、 $288 + 42 = 330$ が見つかります。

$$\begin{array}{c}
 \text{48の倍数} \\
 \left| \begin{array}{l} +12, +30, +42 \end{array} \right|
 \end{array}
 \implies
 \begin{array}{c}
 \text{48の倍数} \\
 \text{288} \qquad \qquad \qquad \text{336} \\
 \left| \begin{array}{l} 300, 318, 330 \end{array} \right|
 \end{array}$$

改めて問題文にあう数列をチェックすると、次の4つの数列が条件を満たします。

- (314, 315, 316, 317), (314, 315, 316, 317, 318),
 (328, 329, 330, 331, 332), (329, 330, 331, 332)



最難関問題

(2) まず、図⑦の剰余の列は7個の数が並ぶので、7の倍数をちょうど1つ含みます。それに対して、図④と⑤の列は5個の数しか並ばないので、7の倍数を含まないか、1つ含むかのいずれかです。

図④の場合は、48の倍数+30である数が5番目となるような数の列です。 $7 \times 7 = 49$ は48より1大きいので、7の倍数は図⑧のように1つずつずれていき、7段ごとの周期となります。また、図⑤の場合は図⑨のようにして同様の周期になります。

図⑧

			28		30	○
				77	78	○
					126	○
168					174	×
					...	×
						○
						○

図⑨

			42			○
			90	91		○
			138		140	○
182			186			×
			...			×
						○
						○

よって、48の倍数ごとに考えると、数列に含まれる7の倍数は図⑩のようになります。

$48 \times 7 = 336$ ごとに数列に含まれる7の倍数は17個となるので、 $33 = 17 \times 2 - 1$ より、図の影を付けた部分、つまり $672 - (48 - 30) = 654$ を含む数列に含まれる7の倍数が33番目です。654を含む数列は図⑪のようになるので、651です。

図⑩

	12	30	42	
0~48	○	○	○	} 17個
~96	○	○	○	
~144	○	○	○	
~192	○	×	×	
~240	○	×	×	
~288	○	○	○	
~336	○	○	○	
...	} 17個
~672	○	○	○	

図⑪

648	649	650	651	652	653	654
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----