連続する整数と剰余

（１，２，３，４），（９，１０，１１，１２，１３，１４，１５）のように，連続する整数がいくつか並んだ列があります。連続する整数の列の中で，３で割って２余る数は２つあり，４で割って１余る数と３余る数は１つずつあり，５で割って１余る数と２余る数は１つずつあり，１６で割って１１余る数は１つあるものについて，以下の問いに答えなさい。

（１）このような連続する整数の列の中で，列に含まれる整数が３００以上３３３以下であるものを，すべて答えなさい。

（２）このような連続する整数の列に含まれる７の倍数のうち，小さい方から３３番目のものを答えなさい。

最難関問題

連続する整数と剰余

（１）（３１４，３１５，３１６，３１７），（３１４，３１５，３１６，３１７，３１８），
（３２８，３２９，３３０，３３１，３３２），（３２９，３３０，３３１，３３２），

（２）６５１

（１）３で割って２余る数が２つあるということは，６で割って２余る数が１つと，６で割って２＋３＝５余る数が１つあるということです。

また，４で割って１余る数と３余る数が１つずつあるという条件と，１６で割って１１余る数が１つあるという条件をあわせると，１６は４の倍数であり，１１÷４＝２余り３であることから，
「１６で割って９余る数と１１余る数が１つずつあり，余りが奇数になる数は他にはない」か，
「１６で割って１１余る数と１３余る数が１つずつあり，余りが奇数になる数は他にはない」のいずれかが満たされればよいことになります。

÷６の剰余で２と５を含む最小の列は，＜２，３，４，５＞と＜５，０，１，２＞です。また，÷１６の剰余で9と１１か１１と１３を含む最小の列は，＜９，１０，１１＞と＜１１，１２，１３＞です。例えば＜２，３，４，５＞と＜９，１０，１１＞を組み合わせると，図①，②等ができます。図①の場合は，÷１６の剰余において余計な奇数が含まれてしまうので，条件を満たしません。図②の場合は，条件に反することなく図③のように５つの剰余の列まで広げることができます。

図①

÷６の剰余…		2	3	4	5
÷16 の剰余…	9	10	11		

⇒

÷６の剰余…		2	3	4	5
÷16 の剰余…	9	10	11	12	13

図②

÷６の剰余…	2	3	4	5	
÷16 の剰余…		9	10	11	

⇒

図③

÷６の剰余…	2	3	4	5	0
÷16 の剰余…	8	9	10	11	12

最難関問題

同様にして図④～⑥の列を考えることができます。

図③

÷６の剰余…	２	３	４	５	０
÷16の剰余…	８	9	10	11	12

図④

÷６の剰余…	２	３	４	５	０
÷16の剰余…	10	11	12	13	14

図⑤

÷６の剰余…	４	５	０	１	２
÷16の剰余…	８	9	10	11	12

図⑥

÷６の剰余…	４	５	０	１	２
÷16の剰余…	10	11	12	13	14

図③～⑥はすべて５つの剰余の列ですから，÷５の剰余である０，１，２，３，４をちょうど１つずつ含みます。

また，図③と図⑥は図⑦のようにつなげてとらえることができます。

図⑦

÷６の剰余…	２	３	４	５	０	１	２
÷16の剰余…	８	9	10	11	12	13	14

図⑦の場合，６で割ったときの余りが０の数，つまりは６の倍数が１６で割ると１２余る数になっているので，条件を満たす最小の整数は１２で，以降は６と１６の最小公倍数である４８を加えていくので，４８の倍数＋１２となります。

同様に，図④の場合，６の倍数が１６で割ると１４余る数になっているので，条件を満たす最小の整数は３０なので，４８の倍数＋３０となります。図⑤の場合，６で割り切れる数が１６で割ると１０余る数になっているので，条件を満たす最小の整数は４２なので，４８の倍数＋４２となります。これらの数のうちで３００～３３３のあたりにある数を探すと，４８×６＝２８８，４８×７＝３３６より，２８８＋１２＝３００，２８８＋３０＝３１８，２８８＋４２＝３３０が見つかります。

４８の倍数　　　　　　　　　４８の倍数

｜＋１２，＋３０，＋４２｜　⇒　

２８８　　　　　　　　　３３６

｜３００，３１８，３３０｜

改めて問題文にあう数列をチェックすると，次の４つの数列が条件を満たします。

（３１４，３１５，３１６，３１７），（３１４，３１５，３１６，３１７，３１８），

（３２８，３２９，３３０，３３１，３３２），（３２９，３３０，３３１，３３２）

最難関問題

（２）まず，図⑦の剰余の列は７個の数が並ぶので，７の倍数をちょうど１つ含みます。それに対して，図④と⑤の列は５個の数しか並ばないので，７の倍数を含まないか，１つ含むかのいずれかです。

図④の場合は，４８の倍数＋３０である数が５番目となるような数の列です。７×７＝４９は４８より１大きいので，７の倍数は図⑧のように１つずつずれていき，７段ごとの周期となります。また，図⑤の場合は図⑨のようにして同様の周期になります。

図⑧

				28		30	○
					77	78	○
						126	○
168						174	×
						…	×
							○
							○

図⑨

				42			○
				90	91		○
				138		140	○
182				186			×
				…			×
							○
							○

よって，４８の倍数ごとに考えると，数列に含まれる７の倍数は図⑩のようになります。
４８×７＝３３６ごとに数列に含まれる７の倍数は１７個となるので，３３＝１７×２－１より，図の影を付けた部分，つまり６７２－（４８－３０）＝６５４を含む数列に含まれる７の倍数が３３番目です。６５４を含む数列は図⑪のようになるので，６５１です。

図⑩

	12	30	42
0～48	○	○	○
～96	○	○	○
～144	○	○	○
～192	○	×	×
～240	○	×	×
～288	○	○	○
～336	○	○	○
…	…	…	…
～672	○	○	○

１７個

１７個

図⑪

648	649	650	651	652	653	654