最難関問題

連続奇数の和

（１，３，５），（５，７）のようにひとつながりの奇数を，「連続する奇数」と呼ぶことにします。それに対して，（１，３，７）は５をとばしているので連続する奇数ではありません。また，（１），（７）のように１個だけの奇数も連続する奇数ではありません。この連続する奇数の和によって整数を表すことを考えます。例えば，１＋３＋５＝９，５＋７＝１２です。

（１）４つの連続する奇数の和で表すことができる整数のうちで，小さいほうから１００番目のものを答えなさい。

（２）１以上１００以下の整数のうちで，連続する奇数の和によって表すことができないものは何個ありますか。

（３）

① ３個，５個，７個，９個，１１個の連続する奇数の和で表すことができる最小の整数を答えなさい。

② ２個，４個，６個，８個，１０個，１２個，１４個，１６個の連続する奇数の和で表すことができる最小の整数を答えなさい。

最難関問題

連続奇数の和（１）８０８　（２）５０個　（３）①３４６５　②３３６０

（１）４つの連続する奇数の和によって表すことができる最小の整数は，１＋３＋５＋７＝１６です。２番目は３＋５＋７＋９＝２４，３番目は５＋７＋９＋１１＝３２です。規則性を考えると，４つの奇数にそれぞれ２を加えてできた４つの奇数の和が次の順番の数となるので，毎回２×４＝８ずつ大きくなりますから，１６から始まって差が８の等差数列ということができます。こうして，１番目の数が８×２，２番目の数が８×３，…，Ｎ番目の数が８×（Ｎ＋１）となるので，１００番目の数は
８×（１００＋１）＝８０８です。

（２）Ｎ個の連続する奇数の和によって表すことができる最小の整数は，１から順に１＋３＋５＋…と奇数をＮ個加えることによって求められます。１＋３＝４，１＋３＋５＝９，１＋３＋５＋７＝１６というように，１から順に奇数をＮ個加えるとＮ×Ｎという平方数になります。

　Ｎ＝２の場合をまず考えます。２つの連続する奇数の和によって表すことができる整数は，小さい順に１＋３＝２×２＝４，４＋２×２＝８，８＋２×２＝１２，…と４の倍数です。よって，（１）で調べた４つの連続する奇数の和によって表すことができる整数はすべて２つの連続する奇数によっても表すことができます。では，６個の連続する奇数の和によって表すことができる整数はどうでしょう。６×６＝３６，３６＋２×６＝４８，…となるので，やはりすべてが４の倍数です。Ｎが偶数の場合，Ｎ個の連続する奇数の和によって表すことができる最小の整数はＮ×Ｎで，以降は順に２×Ｎを加えていきます。Ｎが２の倍数であるために，Ｎ×Ｎも２×Ｎも４の倍数ですから，必ず４の倍数になります。よって，偶数個の連続する奇数の和によって表すことができる整数は，１００以下の４の倍数の個数を求めて，１００÷４＝２５（個）です。

　では，Ｎが奇数の場合はどうでしょう。３個の連続する奇数の和によって表すことができる最小の整数は１＋３＋５＝３×３＝９で，２番目に小さい整数は３＋５＋７＝５×３＝１５，３番目は５＋７＋９＝７×３＝２１です。このように，Ｎが奇数の場合，Ｎ個の連続する奇数のちょうど真ん中の数をＮ倍すれば和を求めることができるので，和は必ず奇数になりますから，Ｎが偶数の場合と重複することはありません。

　同様に，５個の連続する奇数の和によって表すことができる整数は５×５＝２５，７×５＝３５，９×５＝４５，…となります。９×５＝４５は３の倍数なので，１５×３＝４５より３個の連続する奇数の和で表すこともできます。このような重複に気をつけながら調べ上げると，以下のようになります。

〇Ｎ＝３…３×３＝９から３３×３＝９９までの，１＋（３３－３）÷２＝１６（個）

〇Ｎ＝５…重複を除くと，５×５，７×５，~~９×５~~，１１×５，１３×５，~~１５×５~~，１７×５，
　　　　１９×５の６個

〇Ｎ＝７…重複を除くと，７×７，~~９×７~~，１１×７，１３×７の３個

〇Ｎ＝９…Ｎ＝３の場合と全て重複します。

最難関問題

○Ｎ＝１１…１１×１１＝１２１より，１００以下の整数はありません。

よって，１６＋６＋３＝２５（個）です。

以上より，偶数個の連続する奇数の和で表すことができる整数も奇数個の連続する奇数の和で表すことができる整数も２５個ずつあるので，連続する奇数の和で表すことができない整数は１００－２５×２＝５０（個）です。

（３）

①　個数ごとにまとめると，以下のようになります。

・３個…３×３，５×３，…

・５個…５×５，７×５，…

・７個…７×７，９×７，…

・９個…９×９，１１×９，…

・１１個…１１×１１，１３×１１，…

９個の連続する奇数の和で表すことができる整数は必ず３個の連続する奇数の和で表すことができる整数ですから，３個の場合は除いて考えることができます。５，７，９，１１の最小公倍数を求めて，５×７×９×１１＝３４６５です。

最難関問題

②　同じく，個数ごとにまとめます。

・２個…４，８，１２，…

・４個…１６，２４，３２，…

・６個…３６，４８，６０，…

・８個…６４，８０，９６，…

・１０個…１００，１２０，…

・１２個…１４４，１６８，…

・１４個…１９６，２２４，…

・１６個…２５６，２８８，…

１６個の連続する奇数の和で表すことができる整数は，２個，４個，８個の奇数の和でも表せる，というように約数になっている個数を除くと，１０個，１２個，１４個，１６個の場合のみを考えればよいことがわかります。ここから先の処理の方法はいろいろとありますが，一例を上げれば以下のようになります。上にあげた数はすべて４の倍数ですから，４で割り算をして考えます。

・１０個…４×２５，４×３０，…⇒（４で割ると）⇒５×５，５×６，…

・１２個…４×３６，４×４２，…⇒（４で割ると）⇒６×６，６×７，…

・１４個…４×４９，４×５６，…⇒（４で割ると）⇒７×７，７×８，…

・１６個…４×６４，４×７２，…⇒（４で割ると）⇒８×８，８×９，…

よって，5，6，7，8の最小公倍数８４０であれば⇒の右側に共通して現れます。４で割る前の数は，８４０×４＝３３６０です。