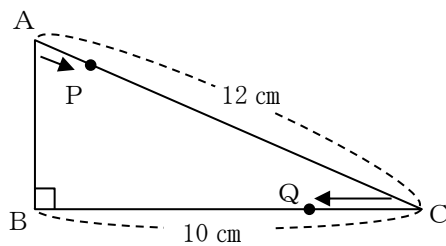


最難関問題

直角三角形と点の移動

下の図のような直角三角形 ABC があります。点 P は頂点 A を出発して辺 AC 上を毎秒 1 cm の速さで何度も往復し、点 Q は頂点 C を出発して辺 BC 上を毎秒 2 cm の速さで何度も往復します。いま、2 点 P 、 Q は同時にそれぞれの頂点から出発しました。



- (1) 三角形 CPQ が 1 回目に直角三角形になるのは、同時に出発してから何秒後ですか。また、2 回目、3 回目、4 回目に直角三角形になるのは、同時に出発してから何秒後ですか。
- (2) 同時に出発してから 5 分間で、三角形 CPQ が直角三角形になることは何回ありますか。

最難関問題

直角三角形と点の移動

(1) 1回目… $3\frac{9}{17}$ 秒後, 2回目…4.5秒後, 3回目…7秒後, 4回目… $8\frac{4}{7}$ 秒後 (2) 90回

(1)

1回目

図①のように, 点Pの真下にQがきたときに1回目で, 角CQPが90度になります。点Pの進んだ距離を[1]とすると, 点Qの進んだ距離は[2], PCの長さは[2]× $\frac{6}{5}$ =[2.4]ですから,

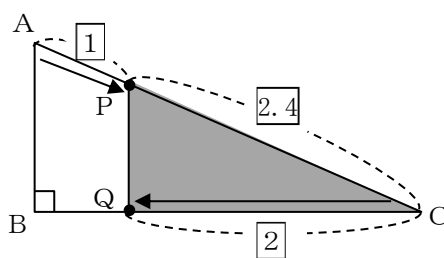
[1]+[2.4]=[3.4]=12 (cm) より, [1]= $3\frac{9}{17}$ (cm) となるので, $3\frac{9}{17} \div 1 = 3\frac{9}{17}$ (秒後) です。

2回目

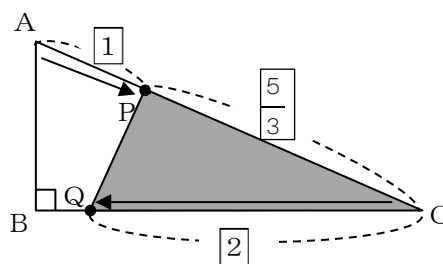
図②のように, 図①から少し過ぎて, 角CPQが90度になるのが2回目です。点Pの進んだ距離を[1]とすると, 点Qの進んだ距離は[2], PCの長さは[2]× $\frac{5}{6}$ = $\frac{5}{3}$ ですから,

[1]+ $\frac{5}{3}$ = $\frac{8}{3}$ =12 (cm) より, [1]=4.5 (cm) となるので, $4.5 \div 1 = 4.5$ (秒後) です。

図①



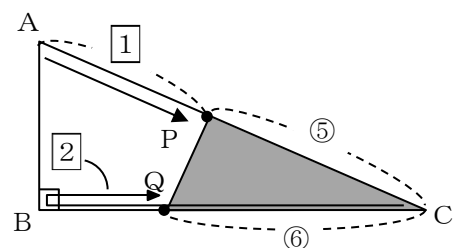
図②



3回目

図③のように, 頂点Bを点Qが折り返した後で, 角CPQが90度になるのが3回目です。点Pの進んだ距離を[1]とすると, 点Qの進んだ距離は[2], PCの長さを5とするとQCの長さは6ですから, [1]+5=12, [2]+6=20より, [1]=7 (cm) となるので, $7 \div 1 = 7$ (秒後) です。

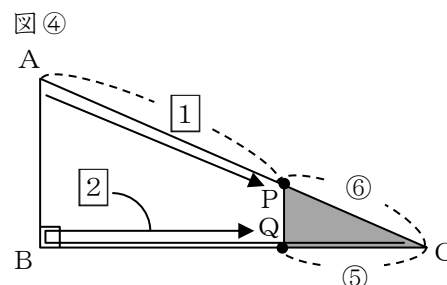
図③



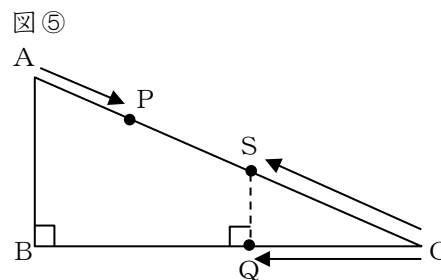
最難関問題

4回目

図④のように、頂点Bを点Qが折り返した後で、角CQPが90度になるのが4回目です。点Pの進んだ距離を①とすると、点Qの進んだ距離は②、PCの長さを⑥とするとQCの長さは⑤ですから、①+⑥=12、②+⑤=20より、①=8 $\frac{4}{7}$ (cm)となるので、8 $\frac{4}{7}$ ÷1=8 $\frac{4}{7}$ (秒後)です。



(2) 周期を考えることが明らかに求められています。ここでは、シャドウの発想を利用した解法で説明します。(1)の1回目と4回目のように、角CQPが90度になる場合は、図⑤のように点Qの真上にある辺AC上の点Sを考えます。点Sの速さは、 $2 \times \frac{6}{5} = 2.4$ (cm)です。点PとSが重なったときに、三角形CPQは角CQPが90度の直角三角形になります。(1)で求めた1回目は点PとSがすれ違う場合、4回目はSがPを追いこす場合です。



点PとSがすれ違う場合

2点の速さの和は $1 + 2.4 = 3.4$ より毎秒3.4 cmですから、1回目は $12 \div 3.4 = \frac{60}{17}$ (秒後)、

2回目は $\frac{60}{17} \times 3 = \frac{180}{17}$ (秒後)、3回目は $\frac{60}{17} \times 5 = \frac{300}{17}$ (秒後)、...となります。

ただし、 $\frac{60}{17} \times 17 = 60$ (秒後)は点Pが点Cと重なるので、条件を満たしません。180秒後、

300秒後も同様です。よって、5分=300秒、 $300 \div \frac{60}{17} = 85$ より、85以下の奇数が43個で、そこから3回分除いて、三角形CPQが直角三角形になるのは40回です。

最難関問題

点SがPを追いこす場合

2点の速さの差は $2.4 - 1 = 1.4$ より毎秒 1.4 cm ですから、1回目は $12 \div 1.4 = \frac{60}{7}$ (秒後),

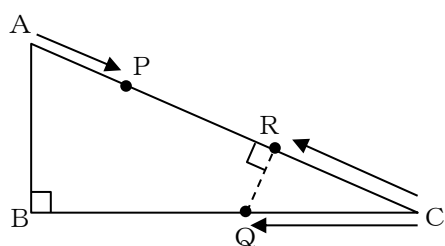
2回目は $\frac{60}{7} \times 3 = \frac{180}{7}$ (秒後), 3回目は $\frac{60}{7} \times 5 = \frac{300}{7}$ (秒後), ...となります。

ただし, $\frac{60}{7} \times 7 = 60$ (秒後) は点Pが点Cと重なるので, 条件を満たしません。180秒後,

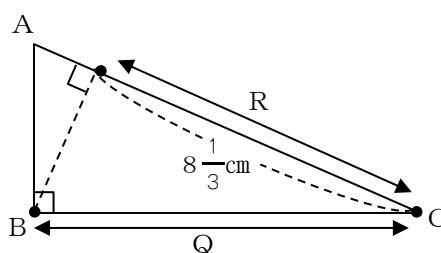
300秒後も同様です。よって, 5分 = 300秒, $300 \div \frac{60}{7} = 35$ より, 35以下の奇数が18個で, そこから3回分除いて, 三角形CPQが直角三角形になるのは15回です。

次に, (1) の2回目と3回目のように, 角CPQが90度になる場合は, 図⑥のように辺AC上にあって, 常に角CRQが90度となるような点Rを考えます。点Rの速さは, $2 \times \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$ (cm) です。点PとRが重なったときに, 三角形CPQは角CPQが90度の直角三角形になります。(1) で求めた2回目は点PとRがすれ違う場合, 3回目はRがPを追いこす場合です。ただし, 点Rの動ける範囲は, 図⑦のように頂点Cから, $10 \times \frac{5}{6} = 8\frac{1}{3}$ (cm) の間です。

図⑥



図⑦



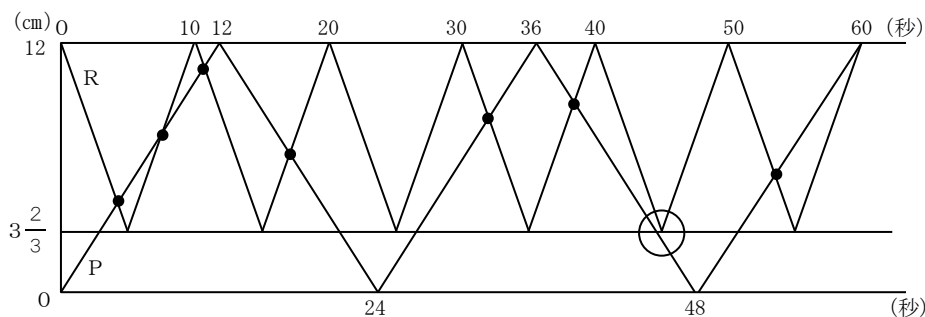
最難関問題

PとRについては動くことができる範囲が異なるので、グラフをかいて考えます。下の図において、たて軸は頂点Aからの距離、横軸は時間を表します。2つの点が重なる1回目と2回目は、(1)で求めた4.5秒後と7秒後です。方眼紙や定規の目盛りを使ってグラフをかくわけではありませんので、

○をつけた部分は時間を計算して確かめます。点Pが頂点Aから $3\frac{2}{3}$ cmのところを通過するのは、 36

$+ 8\frac{1}{3} = 44\frac{1}{3}$ (秒後)、点Rが同じ地点を通過するのは、 $40 + 5 = 45$ (秒後) ですから、点Pと

Rは重なりません。よって、60秒で7回重なります。また、60秒後から120秒後の間は、下のグラフを左右対称にした形になるので、やはり7回重なります。よって、5分間で、 $7 \times 5 = 35$ (回) 重なります。



以上より、 $40 + 15 + 35 = 90$ (回) です。