

## 最難関問題

2番目に大きい約数・3

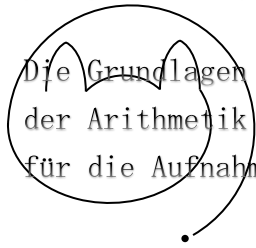
2以上の整数 $N$ の2番目に大きい約数と $N$ の和を, $[N]$ と表します。例えば, $[15] = 15 + 5 = 20$ ,  
 $[13] = 13 + 1 = 14$ です。また, $[ ]$ の個数を,右下に小さい文字をつけて表します。たとえば,  
 $[15]_2 = [[15]] = [20] = 20 + 10 = 30$ です。次の問いに答えなさい。

(1)  $[2]_5$ を計算しなさい。

(2)  $[2]_{15}$ を計算しなさい。

(3)  $[16]_{14}$ を計算しなさい。

(4)  $[128]_n$ の約数が27個あります。このとき, $n$ にあてはまる数をすべて求めなさい。



## 最難関問題

2番目に大きい約数・3 (1) 1 2 (2) 4 8 6 (3) 2 9 1 6 (4) 1 4, 6 4

(1) 計算していくと,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 12$ となります。

(2) 続けて計算していくと,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 18 \rightarrow 27 \rightarrow 36 \rightarrow 54 \rightarrow 81 \rightarrow 108 \rightarrow 162 \dots$ となります。このまま計算を続けるのもそんなに大変ではないのですが, このあたりで決まりに気づいておきたいところです。最初の2を除いて数を3個ずつ区切っていくと,  
 $2 \rightarrow \boxed{3 \rightarrow 4 \rightarrow 6} \rightarrow \boxed{9 \rightarrow 12 \rightarrow 18} \rightarrow \boxed{27 \rightarrow 36 \rightarrow 54} \rightarrow \boxed{81 \rightarrow 108 \rightarrow 162} \dots$ というように, 後のグループには前のグループの3倍の数がならんでいます。 $[2]_{15}$ は $15 \div 3 = 5$ 番目のグループの最後の数ですから,  $6 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 486$ です。

(3) 最初だけ計算をすると,  $16 \rightarrow 24 \rightarrow 36$ より,  $[16]_2 = 36$ です。36は(2)の数列に現れていますから,  $[16]_{14} = [36]_{12} = 36 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 2916$ です。



## 最難関問題

(4) 素因数分解をすると、 $128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ です。整数Nの小さいほうから2番目の約数が2の場合、2番目に大きい約数は $\frac{N}{2}$ です。よって、128に[]の操作を繰り返し行う場合、最初の7回は $1\frac{1}{2}$ 倍されて $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ になり、次に $1\frac{1}{3}$ 倍されて $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ 、次に $1\frac{1}{2}$ 倍されて $2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ になり、…と素因数分解した場合に2と3のみが現れます。素因数2と3の個数に注目すると、7回目以降は次のようになります。

7回目	8回目	9回目
(0, 7)	(2, 6)	(1, 7)
10回目	11回目	12回目
(0, 8)	(2, 7)	(1, 8)
13回目	14回目	15回目
(0, 9)	(2, 8)	(1, 9)
16回目	17回目	…
(0, 10)	(2, 9)	…

以上の規則性から、約数が27個になる場合を探します。

$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{26 \text{ 個}}$$

素因数2の個数は、128が7個で以降は1つずつ減っていき、7回目以降はずつと2個以下ですから、このような数は操作を何回行っても現れません。

$$\underbrace{3 \times \dots \times 3}_{26 \text{ 個}}$$

上の表において(0, 26)になる場合を求めればよいので、 $7 + (26 - 7) \times 3 = 64$  (回目)です。

$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{2 \text{ 個}} \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{8 \text{ 個}}$$

上の表にある、14回目です。

$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{8 \text{ 個}} \times \underbrace{3 \times \dots \times 3}_{2 \text{ 個}}$$

素因数2の個数は最大で128の7個ですから、このような数は操作を何回行っても現れません。

以上より、14と64です。