受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

２番目に大きい約数・３

　２以上の整数Ｎの２番目に大きい約数とＮの和を，［Ｎ］と表します。例えば，［１５］＝１５＋５＝２０，［１３］＝１３＋１＝１４です。また，[] の個数を，右下に小さい文字をつけて表します。たとえば，［１５］$_{2}$＝ [[１５]] ＝［２０］＝２０＋１０＝３０です。次の問いに答えなさい。

（１）［２］$_{5}$を計算しなさい。

（２）［２］$_{15}$を計算しなさい。

（３）［１６］$_{14}$を計算しなさい。

（４）［１２８］$_{n}$の約数が２７個あります。このとき，ｎにあてはまる数をすべて求めなさい。

最難関問題

２番目に大きい約数・３（１）１２　（２）４８６　（３）２９１６　（４）１４，６４

（１）計算していくと，２→３→４→６→９→１２となります。

（２）続けて計算していくと，２→３→４→６→９→１２→１８→２７→３６→５４→８１→１０８→１６２…となります。このまま計算を続けるのもそんなに大変ではないのですが，このあたりで決まりに気づいておきたいところです。最初の２を除いて数を３個ずつ区切っていくと，
２→$\boxed{3\to 4\to 6}$→$\boxed{9\to 12\to 18}$→$\boxed{27\to 36\to 54}$→$\boxed{81\to 108\to 162}$…というように，あとのグループには前のグループの３倍の数がならんでいます。［２］$_{15}$は１５÷３＝５番目のグループの最後の数ですから，６×３×３×３×３＝４８６です。

（３）最初だけ計算をすると，１６→２４→３６より，［１６］$_{2}$＝３６です。３６は（２）の数列に現れていますから，［１６］$_{14}$＝［３６］$_{12}$＝３６×３×３×３×３＝２９１６です。

最難関問題

（４）素因数分解をすると，１２８＝２×２×２×２×２×２×２です。整数Ｎの小さいほうから２番目の約数が２の場合，２番目に大きい約数は$\frac{N}{2}$です。よって，１２８に［］の操作を繰り返し行う場合，最初の７回は$1\frac{1}{2}$倍されて３×３×３×３×３×３×３になり，次に$1\frac{1}{3}$倍されて２×２×３×３×３×３×３×３，次に$1\frac{1}{2}$倍されて２×３×３×３×３×３×３×３になり，…と素因数分解した場合に２と３のみが現れます。素因数２と３の個数に注目すると，７回目以降は次のようになります。

７回目	８回目	９回目
（０，７）	（２，６）	（１，７）
10回目	11回目	12回目
（０，８）	（２，７）	（１，８）
13回目	14回目	15回目
（０，９）	（２，８）	（１，９）
16回目	17回目	…
（０，10）	（２，９）	…

以上の規則性から，約数が２７個になる場合を探します。

$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{26個}$　素因数２の個数は，１２８が７個で以降は１つずつ減っていき，７回目以降はずっと２個以下ですから，このような数は操作を何回行っても現れません。

$\underbrace{3\times\cdots\times3}_{26個}$　上の表において（０，２６）になる場合を求めればよいので，７＋（２６－７）×３＝６４（回目）です。

$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{2個}\times\underbrace{3\times\cdots\times3}_{8個}$　上の表にある，１４回目です。

$\underbrace{2\times\cdots\times2}_{8個}\times\underbrace{3\times\cdots\times3}_{2個}$　素因数２の個数は最大で１２８の７個ですから，このような数は操作を何回行っても現れません。

以上より，１４と６４です。