

部分分数分解・3

次の式を計算しなさい。

(1)

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{3}{40} + \frac{1}{72} + \frac{2}{99} + \frac{3}{154}$$

(2)

$$\frac{5}{6} - \frac{8}{15} + \frac{13}{40} - \frac{17}{72} + \frac{20}{99} - \frac{25}{154}$$

(3)

$$\frac{19}{120} - \frac{30}{209} + \frac{19}{34} + \frac{6}{187} - \frac{18}{65} + \frac{32}{247}$$

最難関問題

部分分数分解・3 (1) $\frac{3}{7}$ (2) $\frac{3}{7}$ (3) $\frac{11}{24}$

(1) $\Delta = \square - \bigcirc$ のとき, $\frac{\Delta}{\square \times \bigcirc} = \frac{\square - \bigcirc}{\square \times \bigcirc} = \frac{\square}{\square \times \bigcirc} - \frac{\bigcirc}{\square \times \bigcirc} = \frac{1}{\bigcirc} - \frac{1}{\square}$ であることを利用します。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{3}{40} + \frac{1}{72} + \frac{2}{99} + \frac{3}{154} \\ &= \frac{1}{2 \times 3} + \frac{2}{3 \times 5} + \frac{3}{5 \times 8} + \frac{1}{8 \times 9} + \frac{2}{9 \times 11} + \frac{3}{11 \times 14} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{11} \right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{14} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{7-1}{14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

(2) (1) と (2) の式を加えると, 次のようになります。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6} + \frac{2}{15} + \frac{3}{40} + \frac{1}{72} + \frac{2}{99} + \frac{3}{154} + \frac{5}{6} - \frac{8}{15} + \frac{13}{40} - \frac{17}{72} + \frac{20}{99} - \frac{25}{154} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{5}{6} + \frac{2}{15} - \frac{8}{15} + \frac{3}{40} + \frac{13}{40} + \frac{1}{72} - \frac{17}{72} + \frac{2}{99} + \frac{20}{99} + \frac{3}{154} - \frac{25}{154} \\ &= \frac{6}{6} - \frac{6}{15} + \frac{16}{40} - \frac{16}{72} + \frac{22}{99} - \frac{22}{154} \\ &= 1 - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{7} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \end{aligned}$$

よって, $\frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ です。このように, (1) の式と (2) の式の答えは等しくなります。

最難関問題

ここで、改めて(2)の式を観察してみます。 $\Delta = \square + \circ$ のとき、 $\frac{\Delta}{\circ \times \square} = \frac{\square + \circ}{\circ \times \square} = \frac{\square}{\circ \times \square} + \frac{\circ}{\circ \times \square} = \frac{1}{\circ} + \frac{1}{\square}$ で

あることを利用します。

$$\begin{aligned} & \frac{5}{6} - \frac{8}{15} + \frac{13}{40} - \frac{17}{72} + \frac{20}{99} - \frac{25}{154} \\ &= \frac{3+2}{2 \times 3} - \frac{5+3}{3 \times 5} + \frac{8+5}{5 \times 8} - \frac{9+8}{8 \times 9} + \frac{11+9}{9 \times 11} - \frac{14+11}{11 \times 14} \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{8}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{14}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} - \frac{1}{14} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{14} = \frac{7-1}{14} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

このように、(2)の式は(1)の式の $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ の順番を入れかえたものと考えることができます。

(3) $\frac{\square - \circ}{\circ \times \square} = \frac{\square}{\circ \times \square} - \frac{\circ}{\circ \times \square} = \frac{1}{\circ} - \frac{1}{\square}$ と $\frac{\square + \circ}{\circ \times \square} = \frac{\square}{\circ \times \square} + \frac{\circ}{\circ \times \square} = \frac{1}{\circ} + \frac{1}{\square}$ が混ざった式です。

$$\begin{aligned} & \frac{19}{120} - \frac{30}{209} + \frac{19}{34} + \frac{6}{187} - \frac{18}{65} + \frac{32}{247} \\ &= \frac{19}{120} - \frac{19+11}{11 \times 19} + \frac{17+2}{2 \times 17} + \frac{17-11}{11 \times 17} - \frac{13+5}{5 \times 13} + \frac{19+13}{13 \times 19} \\ &= \frac{19}{120} - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{17}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{19}\right) \\ & \quad \frac{1}{5} \text{が引き算の形でのみ現れていることに注目をして,} \\ &= \frac{24-5}{5 \times 24} - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{17}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{19}\right) \\ &= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{24}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{19}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{17}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{17}\right) - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{13}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{19}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \frac{1}{19} - \frac{1}{24} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} = \frac{12-1}{24} = \frac{11}{24} \end{aligned}$$