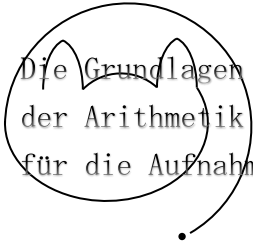


最難関問題

連続する整数の積と2の累乗

1000以下の連続する整数の積について考えます。たとえば、連続する3つの整数の積は、 $1 \times 2 \times 3$, $2 \times 3 \times 4$, $3 \times 4 \times 5$, ..., $998 \times 999 \times 1000$ を計算した答えです。

- (1) 連続する3つの整数の積で、2でちょうど3回割れる（つまり4回割ることはできない）ものは、何個ありますか。
- (2) 連続する3つの整数の積で、2でちょうど8回割れるものは、何個ありますか。
- (3) 連続する5つの整数の積で、2でちょうど8回割れるものは、何個ありますか。



最難関問題

連続する整数の積と2の累乗 (1) 312個 (2) 10個 (3) 48個

(1) 次のア～ウの3つの場合が考えられます。

	\square	$\square + 1$	$\square + 2$
ア		$8 \times \text{奇数}$	
イ	$4 \times \text{奇数}$		
ウ			$4 \times \text{奇数}$

アでは、 $\square + 1$ が $8 \times \text{奇数}$ という偶数なので、 \square と $\square + 2$ は奇数ですから、2でちょうど3回割り切ることができます。 $\square + 1$ には $8 \times 1 \sim 123$ があてはまるので、 $(123 + 1) \div 2 = 62$ (個) あります。

イでは、 \square が $4 \times \text{奇数}$ なので、 $\square + 1$ は奇数であり、 $\square + 2$ は4の倍数に2を加えた数なので、4の倍数ではない2の倍数、つまり、 $2 \times \text{奇数}$ です。よって、あわせると2でちょうど3回割り切れます。ウについても同様です。どちらの場合も、 $4 \times 1 \sim 249$ があてはまるので、

$$(249 + 1) \div 2 \times 2 = 250 \text{ (個) あります。}$$

よって、 $62 + 250 = 312$ (個) です。

(2) 2を7個かけあわせると128、8個かけあわせると256になるので、次のア～ウの3つの場合が考えられます。

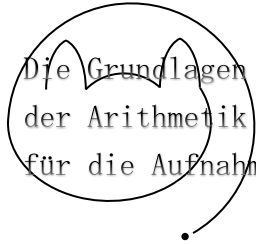
	\square	$\square + 1$	$\square + 2$
ア		$256 \times \text{奇数}$	
イ	$128 \times \text{奇数}$		
ウ			$128 \times \text{奇数}$

アでは、 $\square + 1$ が $256 \times \text{奇数}$ という偶数なので、 \square と $\square + 2$ は奇数なので、2でちょうど8回割り切ることができます。 $\square + 1$ には $256 \times 1, 3$ があてはまるので、2個あります。

イでは、 \square が $128 \times \text{奇数}$ なので、 $\square + 1$ は奇数です。また、128の倍数は4の倍数なので、 $\square + 2$ は4の倍数に2を加えた数なので、4の倍数ではない2の倍数、つまり、 $2 \times \text{奇数}$ です。よって、あわせると2でちょうど8回割り切れます。ウについても同様です。どちらの場合も、

$$128 \times 1, 3, 5, 7 \text{ があてはまるので、} 4 \times 2 = 8 \text{ (個) あります。}$$

よって、 $2 + 8 = 10$ (個) です。



最難関問題

(3) 2を5個かけあわせると32, 6個かけあわせると64になるので, 次のア~オの5つの場合が考えられます。

	\square	$\square + 1$	$\square + 2$	$\square + 3$	$\square + 4$
ア	$32 \times \text{奇数}$				
イ		$128 \times \text{奇数}$			
ウ			$64 \times \text{奇数}$		
エ				$128 \times \text{奇数}$	
オ					$32 \times \text{奇数}$

アでは, \square が $32 \times \text{奇数}$ です。 32 の倍数は 4 の倍数なので, $\square + 2$ は 4 の倍数に 2 を加えた数, つまりは 4 の倍数ではない 2 の倍数なので, $2 \times \text{奇数}$ です。また, 32 の倍数は 8 の倍数なので, $\square + 4$ は 8 の倍数に 4 を加えた数, つまりは 8 の倍数ではない 4 の倍数なので, $4 \times \text{奇数}$ です。よって, あわせると 2 でちょうど $5 + 1 + 2 = 8$ (回) 割り切れます。オについても同様です。どちらの場合も, $32 \times 1 \sim 31$ があてはまるので, $(31 + 1) \div 2 \times 2 = 32$ (個) あります。

イでは, $\square + 1$ が $128 \times \text{奇数}$ です。 128 の倍数は 4 の倍数なので, $\square + 3$ は 4 の倍数に 2 を加えた数, つまりは 4 の倍数ではない 2 の倍数なので, $2 \times \text{奇数}$ です。よって, あわせると 2 でちょうど 8 回割り切れます。エについても同様です。どちらの場合も, $128 \times 1, 3, 5, 7$ があてはまるので, $4 \times 2 = 8$ (個) あります。

ウでは, $\square + 2$ が $64 \times \text{奇数}$ です。 64 の倍数は 4 の倍数なので, \square および $\square + 2$ は 4 の倍数に 2 を加えた数, つまりは 4 の倍数ではない 2 の倍数なので, $2 \times \text{奇数}$ です。よって, あわせると 2 でちょうど $6 + 1 + 1 = 8$ (回) 割り切れます。 $64 \times 1 \sim 15$ があてはまるので, $(15 + 1) \div 2 = 8$ (個) あります。

以上より, $32 + 8 + 8 = 48$ (個) です。