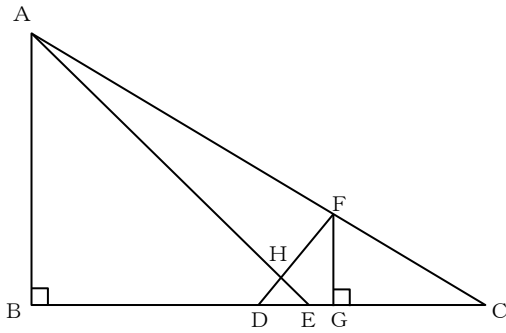


## 最難関問題

相似と垂直・1

下の図の直角三角形  $ABC$  において、辺  $AB$  の長さは  $3780\text{ cm}$ 、辺  $BC$  の長さは  $6492\text{ cm}$  です。辺  $BC$  上の  $B$  から  $3128\text{ cm}$  離れたところに点  $D$ 、 $3969\text{ cm}$  離れたところに点  $E$  をとります。また、辺  $AC$  を  $2:1$  に分ける点を  $F$  とし、点  $F$  から辺  $BC$  に垂直に引いた線と辺  $BC$  が交わる点を  $G$  とし、 $AE$  と  $DF$  の交わる点を  $H$  とします。このとき、三角形  $A FH$  の面積が  $2825760\text{ cm}^2$  になりました。辺  $FH$  の長さを求めなさい。



最難関問題

相似と垂直・1 1160 cm

$AF : FC = 2 : 1$  より,  $BG = 6492 \times \frac{2}{3} = 4328$  (cm),  $GC = 6492 \times \frac{1}{3} = 2164$  (cm),

$FG = 3780 \times \frac{1}{3} = 1260$  (cm) です。また,  $DE = 3969 - 3128 = 841$  (cm),

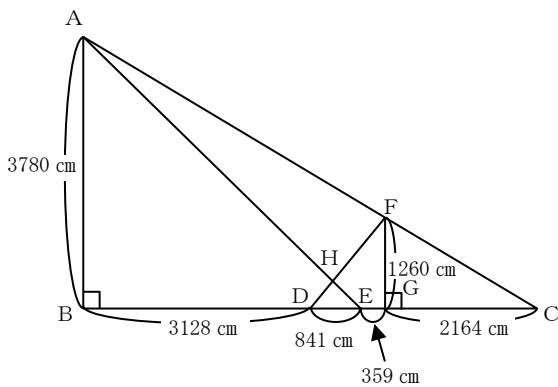
$DG = 4328 - 3128 = 1200$  (cm),  $EG = 1260 - 841 = 359$  (cm) です。これらの長さを書き込むと, 図①のようになります。

図②において, 太線で囲った三角形  $ABE$  の辺  $AB : BE = 3780 : 3969 = 20 : 21$ , 影をつけた三角形  $DGF$  の辺  $DG : GF = 1200 : 1260 = 20 : 21$  です。よって, 2つの三角形は,  $3780 : 1200 = 63 : 20$  の相似です。

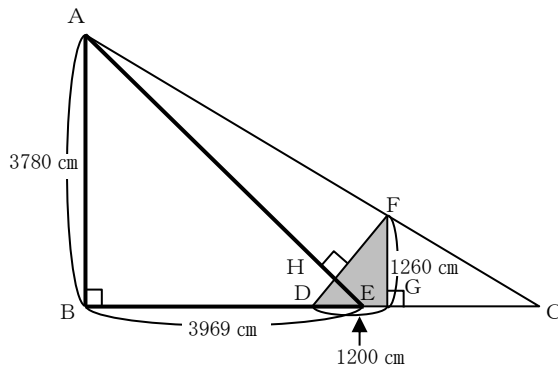
ここで図③のような方眼を考えると, 「2マス下がって3マス右に進む」直線㉞と, 「2マス右に進んで3マス上に進む」直線㉟は, 影をつけた三角形が相似であり,  $\odot + \bullet = 90$  度であることから, 垂直に交わります。また, ㉞と平行な直線㉟も, ㉟と垂直に交わります。よって, 角  $AHF$  は  $90$  度です。

三角形  $AHF$  は直角三角形なので,  $AH \times HF \times \frac{1}{2} = 2825760$ ,  $AH \times HF = 5651520$  です。

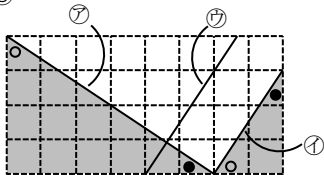
図①



図②



図③



### 最難関問題

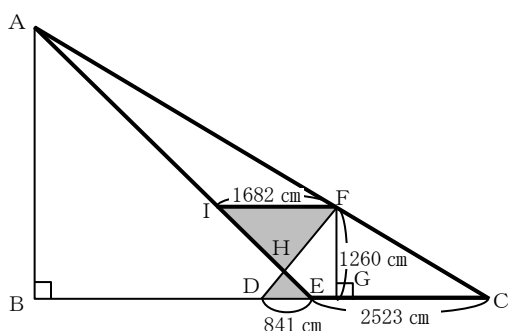
図④のようにFを通して辺BCと平行な直線を引き、AEとの交点をIとすると、太線で囲った三角形AECとAIFが3：2の相似であることから、 $EC = 359 + 2164 = 2523$  (cm),

$IF = 2523 \times \frac{2}{3} = 1682$  (cm) です。よって影をつけた三角形DEHとFIHは、

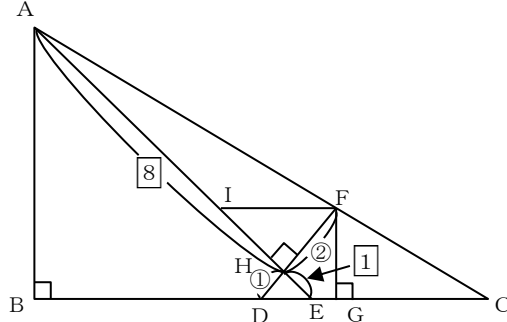
$841 : 1682 = 1 : 2$ の相似です。

図⑤においてFH：HD=2：1です。また、AI：IE=2：1、IH：HE=2：1であることから、AH：HE=8：1です。

図④



図⑤



ここで、三角形ABEとDGFが63：20の相似であることから、 $AE : DF = 63 : 20$ ,

$AH : HF = 63 \times \frac{8}{9} : 20 \times \frac{2}{3} = 21 : 5$ です。このことと、 $AH \times HF = 5651520$ であること

から、HFの長さを求めます。 $21 \times 5 = 105$ ,  $5651520 \div 105 = 53824$ で、53824を素因数分解すると、

$53824 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 29 \times 29 = (2 \times 2 \times 2 \times 29) \times (2 \times 2 \times 2 \times 29)$ となるので、 $HF = 5 \times (2 \times 2 \times 2 \times 29) = 1160$  (cm) です。