

最難関問題

3 辺が整数比の直角三角形・3

次の問いに答えなさい。

- (1) 図 1 において点 F が C E を二等分するとき、長方形 A B C D の面積は何 cm^2 ですか。
- (2) 図 2 の長方形 A B C D において点 F が C E を二等分するとき、A B と A E の長さはそれぞれ何 cm ですか。

図 1

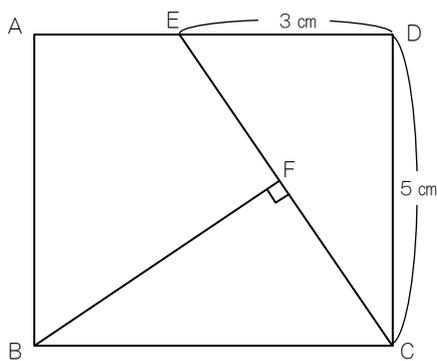
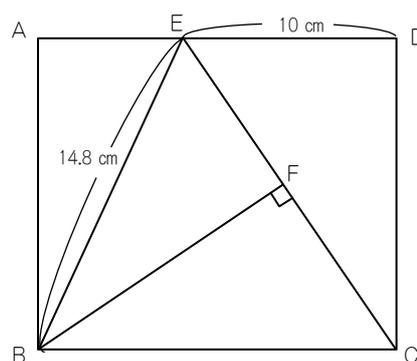


図 2



- (3) 直角三角形の 3 辺の長さの比として考えられる整数比を、4 つ答えなさい。
ただし、 $3 : 4 : 5$ 、 $5 : 12 : 13$ は除きます。また、答えるときは、 $3 : 1 : 2$ ではなくて $1 : 2 : 3$ のように、小さい順に答えなさい。

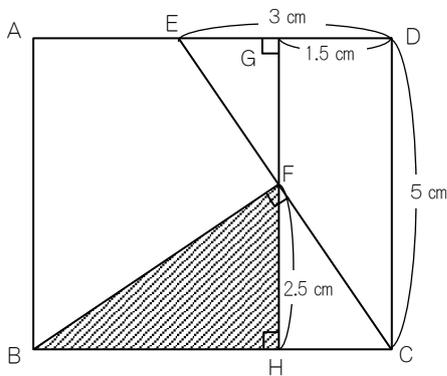
最難関問題

3 辺が整数比の直角三角形・3 (1) $28\frac{1}{3}\text{cm}^2$ (2) $AB = 14\text{cm}$, $AE = 4.8\text{cm}$ (3) 解説参照

この問題の解法に基づいて整数比を計算できるエクセルシート「ピタゴラス数・1」がホームページよりダウンロード可能です。

(1) 図①のように, 点 F を通って辺 AB と平行な直線 GH を引きます。点 F が CE を二等分することから, $GD = 3 \div 2 = 1.5\text{ (cm)}$, $FH = 5 \div 2 = 2.5\text{ (cm)}$ です。斜線部分の三角形 BFH は三角形 CDE と相似なので, $BH = 2.5 \times \frac{5}{3} = \frac{25}{6}\text{ (cm)}$ です。辺 BC の長さは, $\frac{25}{6} + 1.5 = \frac{17}{3}\text{ (cm)}$ なので, 長方形 ABCD の面積は, $5 \times \frac{17}{3} = 28\frac{1}{3}\text{ (cm}^2\text{)}$ です。

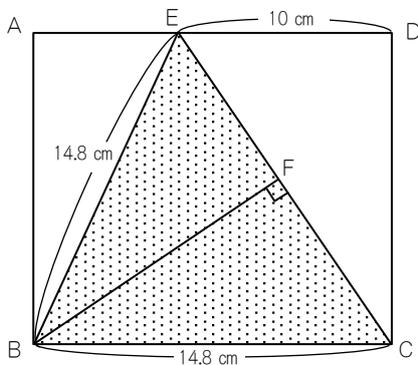
図①



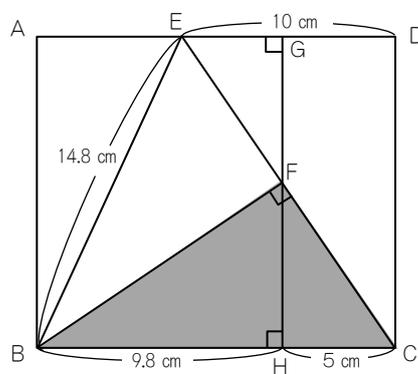
最難関問題

(2) 図②に示した三角形 BCE は二等辺三角形なので、 $BC = 14.8 \text{ cm}$, $AE = 14.8 - 10 = 4.8 \text{ (cm)}$ です。図③のように点 F を通って辺 AB と平行な直線 GH を引くと、点 F が CE を二等分することから、 $CH = 10 \div 2 = 5 \text{ (cm)}$ です。かげをつけた部分の直角三角形の相似によって、 $5 : FH = FH : 9.8$ が成り立つので、 $FH \times FH = 5 \times 9.8 = 49$, $FH = 7$ です。よって、 $AB = 7 \times 2 = 14 \text{ (cm)}$ です。

図②



図③



最難関問題

(3) 図④のように図形を組み合わせた長方形 ABCD において、CD と DE の長さを定めると、かげをつけた直角三角形 ABE の 3 辺の長さをすべて求めることができるので、整数比を得ることができます。

(1) では $\square = 3$, $\triangle = 5$ で、 $AB = 5 \text{ cm}$, $BE = BC = \frac{17}{3} \text{ cm}$, $AE = \frac{8}{3} \text{ cm}$ なので、3 辺の長さの

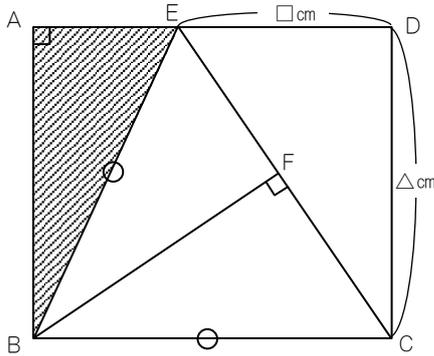
比は $\frac{8}{3} : 5 : \frac{17}{3} = 8 : 15 : 17$,

(2) では $\square = 10$, $\triangle = 14$ で、 $AB = 14 \text{ cm}$, $BE = 14.8 \text{ cm}$, $AE = 4.8 \text{ cm}$ なので、3 辺の長さの比は $4.8 : 14 : 14.8 = 12 : 35 : 37$, となっています。

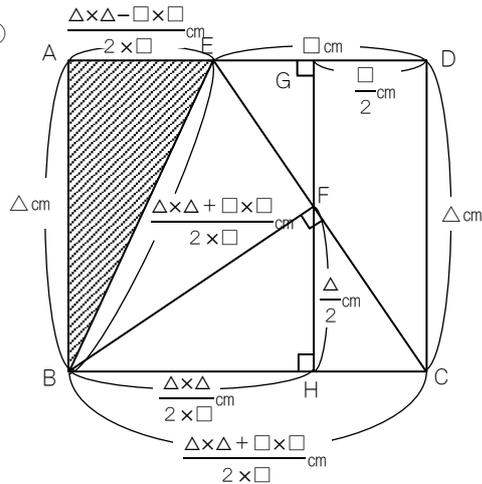
一般に、 \square と \triangle を用いて式を立てると図⑤のようになるので、3 辺の長さの比は、

$$\frac{\triangle \times \triangle - \square \times \square}{2 \times \square} : \triangle : \frac{\triangle \times \triangle + \square \times \square}{2 \times \square} = (\triangle \times \triangle - \square \times \square) : (2 \times \triangle \times \square) : (\triangle \times \triangle + \square \times \square), \text{ です。}$$

図④



図⑤



この式にしたがって計算をすると、以下のような整数比（最小でない場合は割り算が必要です）を得ることができます。

(\square, \triangle)	整数比			
1 2	3	4	5	
1 3	8	6	10	
1 4	15	8	17	
1 5	24	10	26	
1 6	35	12	37	
1 7	48	14	50	
1 8	63	16	65	

(\square, \triangle)	整数比			
2 3	5	12	13	
2 5	21	20	29	
2 7	45	28	53	
3 4	7	24	25	
3 5	16	30	34	
3 7	40	42	58	
4 5	9	40	41	
4 7	33	56	65	