

## 最難関問題

### 有限順位小数

1より小さい小数  $a$  に対して、 $\langle a \rangle$  は  $a$  に現れる数の和を表します。例えば、 $\langle 0.12304 \rangle = 0 + 1 + 2 + 3 + 0 + 4 = 10$  です。

(1)  $\langle a \rangle = 15$  となるような  $a$  として考えられるものを、大きい順に4つ答えなさい。

$\langle a \rangle = 2$  となる  $a$  を大きい順に並べると、 $0.2, 0.11, 0.101, 0.1001, \dots$  となって、 $0.02$  はいつになっても現れません。 $0.2, 0.11, 0.101, 0.1001$  のような数を、「有限順位小数」と呼ぶことにします。 $0.21$  は  $\langle a \rangle = 3$  となる  $a$  を大きい順に並べたときに  $0.3, 0.21, \dots$  となるので有限順位小数、 $0.02$  や  $0.03$  は有限順位小数ではありません。

(2) 次の小数が有限順位小数であれば○、そうでなければ×と答えなさい。

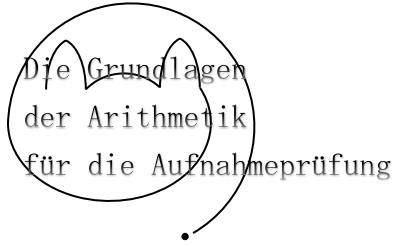
- ①  $0.988$       ②  $0.9801$       ③  $0.909$       ④  $0.9998002$

(3)  $0.123$  や  $0.008$  のように、ちょうど小数第3位まである1より小さい小数を考えます。

$0.120$  は  $0.12$  ですから、ちょうど小数第3位まである小数とは考えません。ちょうど小数第3位まである有限順位小数は、全部で何個ありますか。

(4) ちょうど小数第100位まである有限順位小数は、全部で何個ありますか。また、そのうちで大きいほうから100番目の小数を答えなさい。ただし、同じ数が続く場合は次の例を参考に答えなさい。

例  $0.\overbrace{1 \cdots 1}^{40 \text{ 個}} \overbrace{2 \cdots 2}^{58 \text{ 個}} 34$



## 最難関問題

有限順位小数

(1)  $0.9\bar{6}$ ,  $0.95\bar{1}$ ,  $0.950\bar{1}$ ,  $0.9500\bar{1}$

(2) ①× ②○ ③× ④× (3) 27個 (4) 900個,  $0.\overbrace{9\cdots9}^{88\text{個}}8\overbrace{0\cdots0}^{10\text{個}}1$

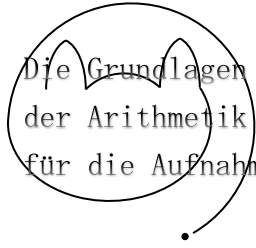
(1) 解説省略

(2)

- ①  $\langle 0.988 \rangle = 25$ です。 $\langle a \rangle = 25$ である  $a$  を大きい順に並べると,  
 $0.997$ ,  $0.996\bar{1}$ ,  $0.9960\bar{1}$ ,  $0.99600\bar{1}$ ,  $\cdots$ となるので,  $0.988$  は有限順位小数ではありません。
- ②  $\langle 0.9801 \rangle = 18$ です。 $\langle a \rangle = 18$ である  $a$  を大きい順に並べると,  
 $0.99$ ,  $0.981$ ,  $0.980\bar{1}$ ,  $\cdots$ となるので,  $0.9801$  は有限順位小数です。
- ③  $\langle 0.909 \rangle = 18$ です。②より,  $0.909$  は有限順位小数ではありません。
- ④  $\langle 0.9998002 \rangle = 37$ です。 $\langle a \rangle = 37$ である  $a$  を大きい順に並べると,  
 $0.99991$ ,  $0.99990\bar{1}$ ,  $0.999900\bar{1}$ ,  $\cdots$ となるので,  $0.9998002$  は有限順位小数ではありません。

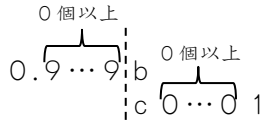
(3) いろいろと調べてみると, 次のようになります。

小数第2位まで  $9\cdots0.999$ ,  $0.998$ ,  $0.997$ ,  $\cdots$ ,  $0.992$ ,  $0.991$  の9個  
小数第1位まで  $9\cdots0.981$ ,  $0.971$ ,  $0.961$ ,  $\cdots$ ,  $0.911$ ,  $0.901$  の9個  
それ以外  $\cdots0.801$ ,  $0.701$ ,  $0.601$ ,  $\cdots$ ,  $0.101$ ,  $0.001$  の9個  
よって,  $9 \times 3 = 27$  (個) です。



## 最難関問題

(4) 有限順位小数は、次のような形をしている小数です。



ちょうど小数第100位まである有限順位小数の場合、次のようになります。

○9が99個以上並ぶ

$0.9 \cdots 99$ ,  $0.9 \cdots 98$ ,  $0.9 \cdots 97$ , ...,  $0.9 \cdots 91$  で9個

○9が98個並ぶ

$0.9 \cdots 981$ ,  $0.9 \cdots 971$ ,  $0.9 \cdots 961$ , ...,  $0.9 \cdots 901$  で9個

○9が97個並ぶ

$0.9 \cdots 9801$ ,  $0.9 \cdots 9701$ ,  $0.9 \cdots 9601$ , ...,  $0.9 \cdots 9001$  で9個

…中略…

○9が1個並ぶ

$0.980 \cdots 01$ ,  $0.970 \cdots 01$ ,  $0.960 \cdots 01$ , ...,  $0.900 \cdots 01$ , で9個

○9が並ばない

$0.80 \cdots 01$ ,  $0.70 \cdots 01$ ,  $0.60 \cdots 01$ , ...,  $0.00 \cdots 01$ , で9個

以上よりちょうど小数第100位まである有限順位小数は、 $9 \times 100 = 900$  (個) あります。

また、大きいほうから100番目の有限順位小数は、 $100 \div 9 = 11$  余り1より、

9が小数第1位から順に、 $99 - 11 = 88$  (個) 並ぶ数のうちで最も大きい数ですから、

$$\begin{array}{c}
 \text{88個} \quad \text{10個} \\
 \overbrace{0.9 \cdots 9} 8 \overbrace{0 \cdots 0} 1
 \end{array}$$
 です。