

最難関問題

三角形の周回と点の周回

1 辺が 1 cm の正三角形 ABC があり、点 P は図 1 のように頂点 A を出発し、毎秒 1 cm の速さで正三角形 ABC の辺上を時計回りに回り続けます。また、正三角形 ABC は、毎秒 1 cm の速さでそれぞれの頂点が正三角形を描くように、右下、左、右上の向きに平行に移動し、もとの位置に戻ると止まります。図 2 は各頂点が 1 辺 3 cm の正三角形を描く場合を表しています。

図 1

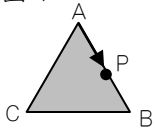
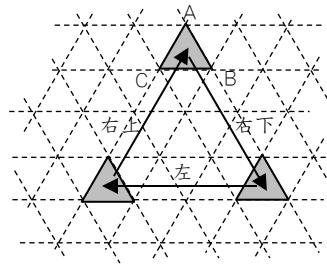


図 2



- (1) 正三角形 ABC の各頂点が 1 辺 3 cm の正三角形を描く場合の、頂点 P が通過したあとの線を、図 3にかきなさい。
- (2) 正三角形 ABC の各頂点が 1 辺 4 cm の正三角形を描く場合の、頂点 P が通過したあとの線を、図 4にかきなさい。

図 3

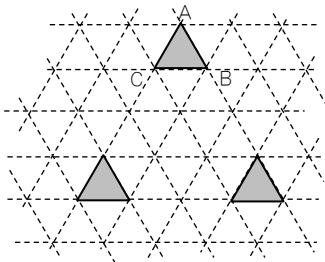
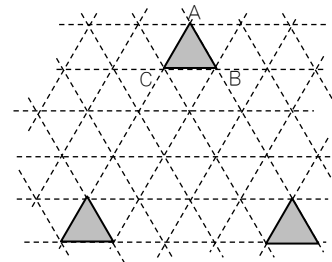


図 4



- (3) 正三角形 ABC の各頂点が 1 辺 80 cm の正三角形を描く場合の、頂点 P が通過したあとの線によって囲まれる部分の面積は、1 辺が 1 cm の正三角形の面積の何倍ですか。必要であれば、2 枚目の紙を用いて考えなさい。

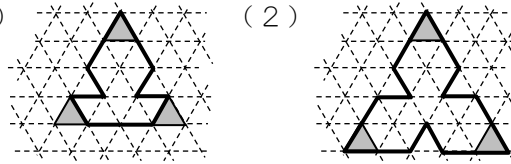
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

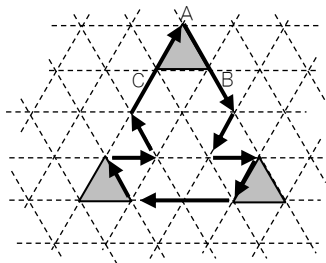
最難関問題

三角形の周回と点の周回 (1) (2) (3) 6480倍

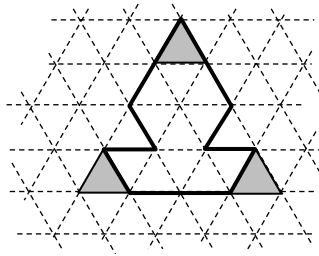


(1) 点Pの1秒ごとの動いたあとは図①の矢印のようになるので、図②が答えとなります。

図①

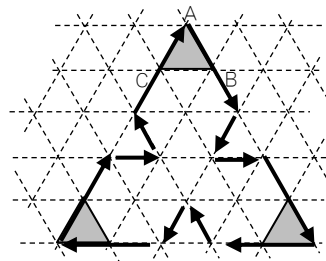


図②

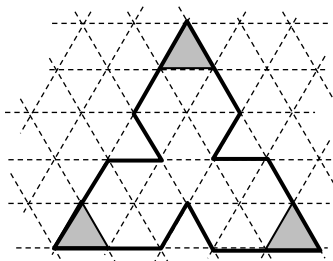


(2) 点Pの1秒ごとの動いたあとは図③の矢印のようになるので、図④が答えとなります。

図③



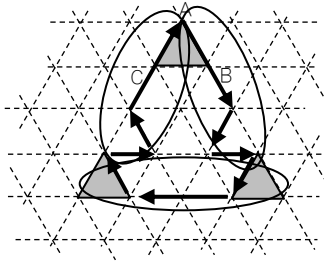
図④



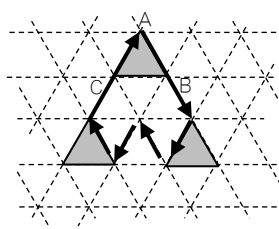
最難関問題

(3) 頂点Pは正三角形ABCが右下, 左, 右上に進む際に, それぞれ3秒周期で図⑤のような同じ動きをくりかえします。ただし, 周期の始まりは正三角形ABCが進む長さによって異なってきます。正三角形ABCの各頂点が1辺2cmの正三角形を描く場合は図⑥, 5cmの場合は図⑦のようになります。

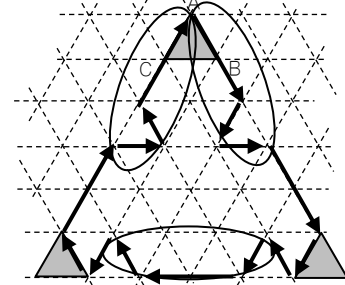
図⑤



図⑥



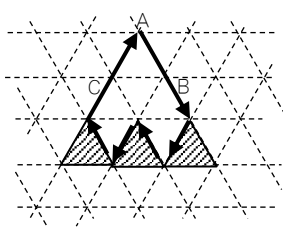
図⑦



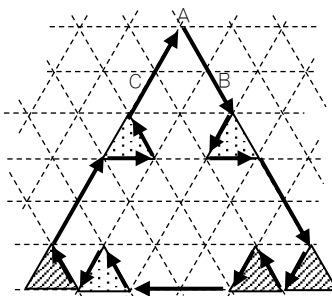
2 cmの場合と5 cmの場合では3 cm異なり, 3秒ごとの周期をくり返すということから, 図⑥と図⑦を見比べると, 右下, 左, 右上の動きにおいて図⑤に示した周期が1回分増え, 頂点での動き方は全く同じになっています。ここで, 頂点Pが通過したあとの線によって囲まれた部分の面積を考えます。

2 cmの場合は, 図⑧のように1辺が3 cmの正三角形から斜線部分の3個の1辺1 cmの正三角形を除いた形になるので, その面積は1辺1 cmの正三角形の面積の, $3 \times 3 - 3 = 6$ (倍)です。5 cmの場合は, 図⑨のようになって, 各辺で周期が1回ずつ増えることから, あみ目で示した3個の1辺1 cmの正三角形を, さらに除くことになります。よって, $6 \times 6 - 3 \times 2 = 30$ (倍)です。

図⑧



図⑨



よって, 80 cmの場合は, $80 \div 3 = 26$ 余り 2 より, 2 cmの場合に対して3 cm増やすことを26回くり返しているのです。 $81 \times 81 - 3 \times 27 = 6480$ (倍)です。