

## 最難関問題

引いたカードの範囲

$\boxed{1}$ ,  $\boxed{2}$ ,  $\boxed{3}$ , ...と1以上の整数が書かれたカードが1枚ずつあります。まずA君が1枚カードを引きます。次にB君がA君より大きく、かつ3以上の数のカードを1枚引きます。最後にC君がA君とB君の数の差以下の数のカードを1枚引きます。

そして、D君が「A君とC君のカードの差」と「B君とC君のカードの差」の和を計算して伝えます。

(1) D君が5と伝えました。A君, B君, C君が引いたカードの組み合わせは何通り考えられますか。

(2) D君が100と伝えました。A君, B君, C君それぞれについて、引いた可能性のあるカードのうちに数が最も小さいものと大きいものを答えなさい。

	A 君	B 君	C 君
最小			
最大			

(3) D君が計算した答えを伝えました。このとき、B君が引いた可能性のあるカードのうちに最も小さいものは222のカードでした。このとき、D君が伝えた答えと、A君, B君, C君それぞれについて、引いた可能性のあるカードのうちに数が最も小さいものと大きいものの組み合わせをすべて答えなさい。解答らんはすべて使うとはかぎりません。

D 君		A 君	B 君	C 君
	最小		2 2 2	
	最大			
D 君		A 君	B 君	C 君
	最小		2 2 2	
	最大			
D 君		A 君	B 君	C 君
	最小		2 2 2	
	最大			
D 君		A 君	B 君	C 君
	最小		2 2 2	
	最大			

## 最難関問題

引いたカードの範囲 (1) 14通り (2)(3) 解説参照

(1) C君のカードがB君のカードより小さいことはしまっているのに、A君のカードより大きい場合と小さい場合に分けて考えます。

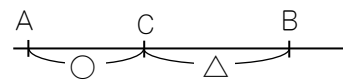
### A君のカードより大きい場合

図①のようにAとCの差を○、BとCの差を△とします。○+△=5なので、BはAより5大きく、Cは5以下、Aは4以下となります。

- ・ A = 4 ... B = 4 + 5 = 9, C = 5 の1通り
- ・ A = 3 ... B = 3 + 5 = 8, C = 4, 5 の2通り
- ・ A = 2 ... B = 2 + 5 = 7, C = 3 ~ 5 の3通り
- ・ A = 1 ... B = 1 + 5 = 6, C = 2 ~ 5 の4通り

あわせて、1 + 2 + 3 + 4 = 10 (通り) です。

図①



### A君のカードより小さい場合

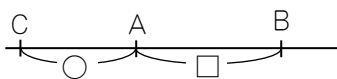
図②のようにAとCの差を○、AとBの差を□とします。○×2+□=5なので、(○, □) = (1, 3), (2, 1) のいずれかです。

- ・ (1, 3) ... Cは3以下なので、(C, A, B) = (3, 4, 7), (2, 3, 6), (1, 2, 5) の3通りです。

- ・ (2, 1) ... C = 1 なので、(C, A, B) = (1, 3, 4) の1通りです。

あわせて、3 + 1 = 4 (通り) です。

図②

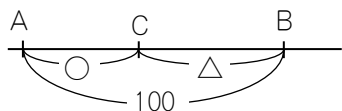


以上より、10 + 4 = 14 (通り) です。

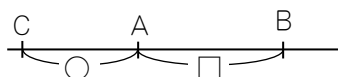
## 最難関問題

(2) (1) 同様に, C君のカードがA君のカードより大きい図③の場合と小さい図④の場合で考えます。

図③



図④



図③の場合, C君のカードは2以上100以下です。C=2の場合, A=1, B=101です。  
C=100の場合, Aは最大で99, Bは199です。

図④の場合,  $\bigcirc \times 2 + \square = 100$ で, Cは $\square$ 以下です。 $(\bigcirc, \square)$ はそれぞれが最大の場合と最小の場合で,  $(\bigcirc, \square) = (49, 2), (1, 98)$ です。 $(\bigcirc, \square) = (49, 2)$ の場合, C=1とすると  
 $A = 1 + 49 = 50$ ,  $B = 50 + 2 = 52$ です。 $(\bigcirc, \square) = (1, 98)$ の場合, C=1とすると  
 $A = 1 + 1 = 2$ ,  $B = 2 + 98 = 100$ で, C=98とすると  $A = 98 + 1 = 99$ ,  $B = 99 + 98 = 197$ です。

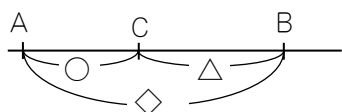
以上より, 次のようになります。

【解答】

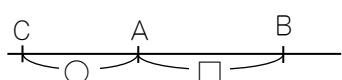
	A 君	B 君	C 君
最小	1	52	1
最大	99	199	100

(3) (2) をもとに, A~C君の最小と最大がどのように決まるのかを考えます。D君の計算した答えを $\diamond$ とします。図⑤の場合は $\bigcirc + \triangle = \diamond$ であればよいので, Aは最小で1になります。また, AとBの差は, 図⑤では $\diamond$ であるのに対して, 図⑥では $\bigcirc \times 2 + \square = \diamond$ の $\square$ ですから, 図⑤の $\diamond$ が最大です。よって, Cの最大は, 図⑤においてCのカードを $\diamond$ とした場合であり, このときにAは $\diamond - 1$ です。図⑥において $\diamond = \bigcirc \times 2 + \square$ であり, Aは最大でもC= $\bigcirc$ のときの $\bigcirc + \square$ ですから, 必ず $\diamond$ より小さくなるので, Aの最大は $\diamond - 1$ です。Bの最大は, 図⑤の場合は $A + \diamond = (\diamond - 1) + \diamond = \diamond \times 2 - 1$ です。図⑥の場合はAの最大が $\diamond - 1$ 以下であり, AとBの差の $\square$ は $\diamond$ より小さいので,  $\diamond \times 2 - 1$ がBの最大です。

図⑤



図⑥



D 君		A 君	B 君	C 君
$\diamond$	最小	1		1
	最大	$\diamond - 1$	$\diamond \times 2 - 1$	$\diamond$

## 最難関問題

引き続き、残ったBの最小について考えます。図⑤の場合、Bは◇より大きくなりますが、既に(2)においてBの最小は◇より小さくなっているので、図⑥を考えます。図⑥では $\bigcirc \times 2 + \square = \diamond$ ですから、 $\bigcirc$ が大きく $\square$ が小さいほど、Cは小さくなり、 $B = C + \bigcirc + \square$ も小さくなります。この場合、◇が奇数か偶数かで変わってきます。

### ◇が奇数の場合

$\bigcirc \times 2 + \square = \diamond$ の $\square = 1$ で $C = 1$ 、 $\bigcirc = \frac{\diamond - 1}{2}$ となって、

$$B = C + \bigcirc + \square = 1 + \frac{\diamond - 1}{2} + 1 = \frac{\diamond}{2} + 1.5 \text{ です。}$$

### ◇が偶数の場合

$\bigcirc \times 2 + \square = \diamond$ の $\square = 2$ で $C = 1$ 、 $\bigcirc = \frac{\diamond - 2}{2}$ となって、

$$B = C + \bigcirc + \square = 1 + \frac{\diamond - 2}{2} + 2 = \frac{\diamond}{2} + 2 \text{ です。}$$

よって、 $B = 222$ のとき、

◇が奇数なら  $222 = \frac{\diamond}{2} + 1.5$  より  $\diamond = 441$ 、

◇が偶数なら  $222 = \frac{\diamond}{2} + 2$  より  $\diamond = 440$ 、となり、次の2通りが答えとなります。

【解答】

D 君		A 君	B 君	C 君
4 4 1	最小	1	2 2 2	1
	最大	4 4 0	8 8 1	4 4 1
D 君		A 君	B 君	C 君
4 4 0	最小	1	2 2 2	1
	最大	4 3 9	8 7 9	4 4 0