

最難関問題

レーザー光線と小正方形のアドレス

1 辺が 1 cm の小正方形をすき間なく並べて、図 1 のような長方形 $ABCD$ を作ります。対角線 AC 上を A から C に向けて進む点 P が通過する小正方形について、考えます。また、図 2 のように、 A から B の向きに 2 行目、 A から C の向きに 3 列目に並ぶ小正方形を、 $(2, 3)$ と表すことにします。

図 1

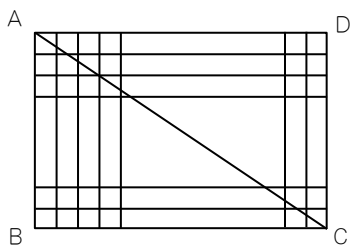
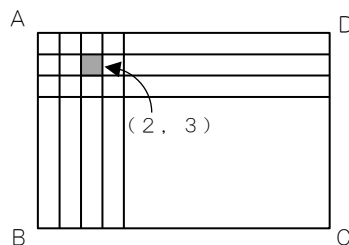


図 2



- (1) $AB = 12$ cm, $AD = 15$ cm のとき、点 P が 10 番目に通過する小正方形を、 (\square, \triangle) の形で答えなさい。
- (2) 点 P が 19 番目に通過する小正方形が $(10, 14)$ です。このとき、長方形 $ABCD$ の面積として考えられるものを、小さい順に 3 つ答えなさい。
- (3) 点 P が 150 番目に通過する小正方形が $(61, 95)$ です。このとき、長方形 $ABCD$ の面積として考えられるもののうちで、小さいほうから 5 番目のものを答えなさい。

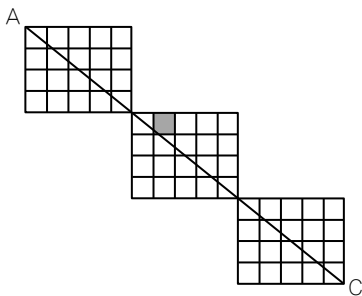
最難関問題

レーザー光線と小正方形のアドレス

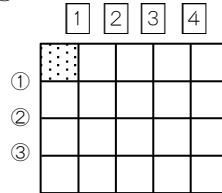
- (1) (5, 7) (2) 150 cm^2 , 216 cm^2 , 294 cm^2 (3) 8624 cm^2

(1) 12, 15を最大公約数の3で割ると4, 5になるので, 対角線ACは, 図①のように $4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ の長方形の通過を3回くり返します。 $4\text{ cm} \times 5\text{ cm}$ の長方形において, 対角線はあみ目をかけた左上の正方形をはじめに通過し, 以降は①~③および①~④の直線を横切るとに新しい正方形を通過するので, $1 + 3 + 4 = 8$ (個)の正方形を通過します。よって, 10番目は図①のかげをつけた正方形で, (5, 7)です。

図①

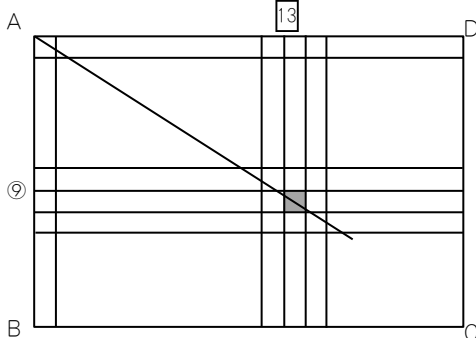


図②

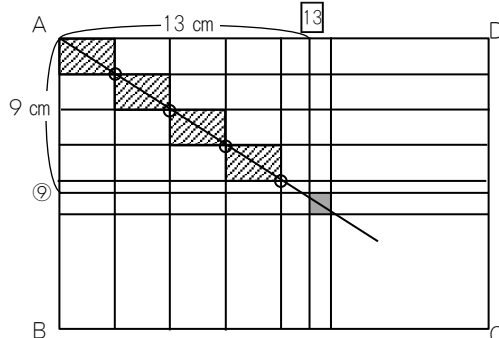


(2) 図③のように考えると, (10, 14)は $1 + 9 + 13 = 23$ (番目)に通過する正方形です。それが19番目になるのは, 図④のように, $23 - 19 = 4$ (回), 2方向の直線を同時に横切るためです。

図③



図④



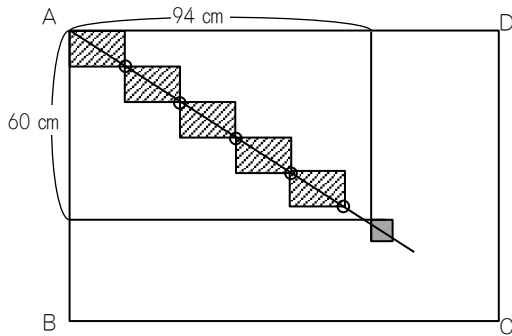
このとき, 斜線部分の長方形のたての長さは, $9 \div 5 = 1.8$ より大きく, $9 \div 4 = 2.25$ 以下の整数cmなので, 2 cm です。横の長さは, $13 \div 5 = 2.6$ より大きく, $13 \div 4 = 3.25$ 以下なので, 3 cm です。長方形ABCDは斜線部分の長方形と相似なので, たて 10 cm , 横 14 cm 以上でたてと横の長さの比が $2 : 3$ の場合を考えて,

$10 \times 15 = 150\text{ (cm}^2\text{)}, 12 \times 18 = 216\text{ (cm}^2\text{)}, 14 \times 21 = 294\text{ (cm}^2\text{)}$ です。

最難関問題

(3) (2) と同様に考えると, $1 + 60 + 94 = 155$, $155 - 150 = 5$ より, 対角線 AC は図⑤のように 5 回同時に 2 方向の直線を通過します。

図⑤



斜線部分の長方形のたての長さは, $60 \div 6 = 10$ より大きく, $60 \div 5 = 12$ 以下の整数 cm なので, 11 cm か 12 cm です。横の長さは, $94 \div 6 = 15.6\dots$ より大きく, $94 \div 5 = 18.8$ 以下なので, 16 cm か 17 cm か 18 cm です。ただし, たてと横の長さは cm の単位において互いに素な整数でなければならないので, (たて, 横) = (11 cm, 16 cm), (11 cm, 17 cm), (11 cm, 18 cm), (12 cm, 17 cm) の 4 通りが考えられます。長方形 ABCD は斜線部分の長方形と相似で, たてが 61 cm, 横が 95 cm 以上なので,

(11 cm, 16 cm) \rightarrow (66 cm, 96 cm), (77 cm, 112 cm), \dots

(11 cm, 17 cm) \rightarrow (66 cm, 102 cm), (77 cm, 119 cm), \dots

(11 cm, 18 cm) \rightarrow (66 cm, 108 cm), (77 cm, 126 cm), \dots

(12 cm, 17 cm) \rightarrow (72 cm, 102 cm), (84 cm, 119 cm), \dots

となって, 小さいほうから 5 番目は, $77 \times 112 = 8624$ (cm²) です。