最難関問題

テトラボナッチ数列の２つの議論

○と×を横一列にいくつか並べます。並べるときは，どの連続する４個を見ても，少なくとも○が１つは含まれているようにします。よって，××○×○××××○○のように並べることはできません。

○と×を３個並べる方法は，○○○，○○×，○×○，○××，×○○，×○×，××○，×××の８通りがあります。このことを，[３] ＝８と表します。

（１）[４]，[５] を求めなさい。

（２）[６]，[７]，[８] を求めなさい。

（３）[９] を求めるために，太郎くんと花子さんはそれぞれ考えました。

太郎くんの考え
きまりにしたがった○と×の並びを□□…□とすると， □□□□□□□□○と□□□□□□□□×を作ることができるが， □□□□□□□□×の場合，□□□□○××××という条件に合わない並びができてしまう。

①　太郎くんの考えにしたがって，[９] を求めなさい。

（問題は次のページに続きます）

最難関問題

花子さんの書きかけのノート
　きまりにしたがった○と×の並びを□□…□として，次の４つに場合分け。
□□□□□
□□□□□□
□□□□□□□
□□□□□□□□

②　花子さんの書きかけのノートを完成させて，［９］を求めなさい。

（４）［１８］＝１４７３１２，［１９］＝２８３９５３，［２０］＝５４７３３７，
　　［２１］＝１０５５０２６，［２２］＝２０３３６２８です。
　　太郎くんと花子さん，それぞれの考えを利用して，［２３］を求める式を書きなさい。

最難関問題

テトラボナッチ数列の２つの議論

（１）［４］＝１５，［５］＝２９　（２）［６］＝５６，［７］＝１０８，［８］＝２０８

（３）（４）解説参照

（１）○×を４個ただ並べる方法は，２×２×２×２＝１６（通り）あります。そこから××××の１通りを除けばよいので，［４］＝１６－１＝１５です。

［５］は［４］を利用して求めることができます。［４］の１５通りの並べ方の右側に○を置くことはできるので，１５通りあります。それに対して×を置く場合は，○××××の場合のみ条件を満たさないので，１５－１＝１４（通り）です。よって，［５］＝１５＋１４＝２９です。

（２）［６］も同様にして求めることができます。［５］の２９通りの並べ方の右側に○を置く場合は２９通りです。それに対して×を置く場合は，□○××××の□が○か×なので，２通りのみ条件を満たさないので，［６］＝２９×２－２＝５６です。

［７］以降も同様に考えます。□□○××××の□□には○と×のどちらが入ってもよいので，２×２＝４（通り）が条件を満たしません。よって，［７］＝５６×２－４＝１０８です。

［８］＝１０８×２－２×２×２＝２０８です。

（３）

①　［９］は，２０８×２－２×２×２×２＝４００ではありません。というのも，□□□□○××××の□□□□がすべて×であるような並び方は，［８］に含まれないからです。

□□□□は［４］＝１５より１５通りあるので，［９］＝２０８×２－１５＝４０１です。

②以下が解答例です。

花子さんの書きかけのノート

きまりにしたがった○と×の並びを□□…□として，次の４つに場合分け。

□□□□□○×××

□□□□□□○××

□□□□□□□○×　　　よって，［９］＝［５］＋［６］＋「7」＋「8」

□□□□□□□□○　　　　　　＝２９＋５６＋４０８＋２０８＝４０１

最難関問題

（４）

太郎くんの考え

［ｎ］を求める際には，［ｎ－１］×２から，条件を満たさない，

$\underbrace{\square\cdots\cdots\square}_{\text{ｎ－５個}}$○××××　の組みあわせを除くことが必要です。ここで，

$\underbrace{\square\cdots\cdots\square}_{\text{ｎ－５個}}$○×××　は条件を満たす並べ方なので，ｎ－５個の□……□の並べ方は，［ｎ－５］に等しくなります。よって，［ｎ］＝［ｎ－１］×２－［ｎ－５］です。以上より，

［２３］＝［２２］×２－［１８］＝<u>２０３３６２８×２－１４７３１２＝３９１９９４４</u>です。

花子さんの考え

［２３］＝<u>２８３９５３＋５４７３３７＋１０５５０２６＋２０３３６２８＝３９１９９４４</u>です。