



桁入れかえと2026

4けたの整数について、自身および各位の数を入れかえてできるすべての整数の和を求めます。例えば、1200であれば、 $1200 + 1020 + 1002 + 2100 + 2010 + 2001 = 9333$ です。以下の問いに答えなさい。

- (1) 2026について、自身および各位の数を入れかえてできるすべての整数の和を求めなさい。
- (2) 2026のように、位に現れる4つの数が0, a, a, bの3種類である4けたの整数で、自身および各位の数を入れかえてできるすべての整数の和が、(1)で求めた値と等しい4けたの整数は、2026もふくめて何個ありますか。
- (3) 自身および各位の数を入れかえてできるすべての整数の和が、(1)で求めた値の2倍となる4けたの整数は、何個ありますか。

桁入れかえと 2 0 2 6 (1) 3 2 2 2 0 (2) 3 6 個 (3) 1 0 8 個

(1) 2 0 2 6 を含めた 9 個の整数の和を求めて、3 2 2 2 0 です。

(2) 0, a, a, b を並べてできる整数は,

千の位が a … 百の位以下は 0, a, b の並びかえで 6 通り

千の位が b … 百の位以下は 0, a, a の並びかえで 3 通り

となって、9 個あります。このとき,

a は千の位に 6 回, 百・十・一の位に 4 回ずつ現れ,

b は千の位に 3 回, 百・十・一の位に 2 回ずつ現れ,

0 は千の位に 0 回, 百・十・一の位に 3 回ずつ現れます。

よって、9 個の整数の和は、 $(a \times 2 + b) \times 3222$ です。

$(a \times 2 + b) \times 3222 = 32220$ より、 $a \times 2 + b = 10$ となるので、

$(a, b) = (1, 8), (2, 6), (3, 4), (4, 2)$ の 4 パターンあります。

0, a, a, b を並べてできる整数は 9 個ずつあるので、 $4 \times 9 = 36$ (個) です。

(3) 0, a, a, b 以外の数字の組み合わせについても, 同様に和を求めると次のようになります。

- a, b, c, d $\cdots (a + b + c + d) \times 6666$
- a, b, c, c $\cdots (a + b + c \times 2) \times 3333$
- a, b, b, b $\cdots (a + b \times 3) \times 1111$
- a, a, b, b $\cdots (a + b) \times 3333$
- 0, a, b, c $\cdots (a + b + c) \times 6444$
- 0, a, a, b $\cdots (a \times 2 + b) \times 3222$
- 0, a, a, a $\cdots a \times 3222$
- 0, 0, a, b $\cdots (a + b) \times 3111$
- 0, 0, a, a $\cdots a \times 3111$
- 0, 0, 0, a $\cdots a \times 1000$

以上の内で, $32220 \times 2 = 64440$ の約数となるのは,
 $64440 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 179$ であることから,

- 0, a, b, c $\cdots (a + b + c) \times 6444$
 - 0, a, a, b $\cdots (a \times 2 + b) \times 3222$
- の2つです。

○ 0, a, b, c の場合

$$(a + b + c) \times 6444 = 64440, \quad a + b + c = 10 \text{ より,}$$

$(a, b, c) = (1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 3, 5)$ です。

0, a, b, c を並びかえると 18 通りの整数ができるので, $4 \times 18 = 72$ (通り) です。

○ 0, a, a, b の場合

$$(a \times 2 + b) \times 3222 = 64440, \quad a \times 2 + b = 20 \text{ より,}$$

$(a, b) = (9, 2), (8, 4), (7, 6), (6, 8)$ です。

0, a, a, b を並びかえると 9 通りの整数ができるので, $4 \times 9 = 36$ (通り) です。

以上より, $72 + 36 = 108$ (個) です。