

最難関問題

中心の重なり

長さが70 cmのまっすぐな線ABがあります。線AB上には、たて6 cm・横8 cmで対角線の長さが10 cmの長方形と、1辺が5 cmの正六角形が、図1の位置にあり、矢印の向きにすべることなく同時に回転し始めます。

2つの図形は、頂点の1つが点AかBと重なるとすぐに反対側に向けて回転していきます。また、長方形の対角線は図2のような角度を成します。

図1

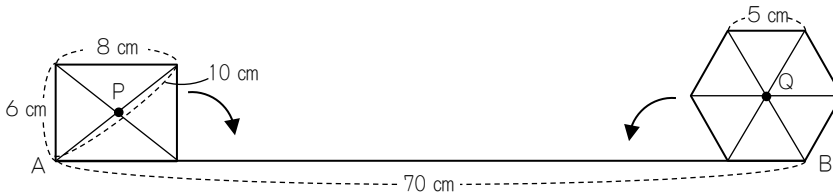
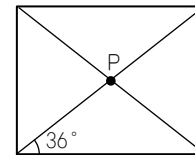


図2

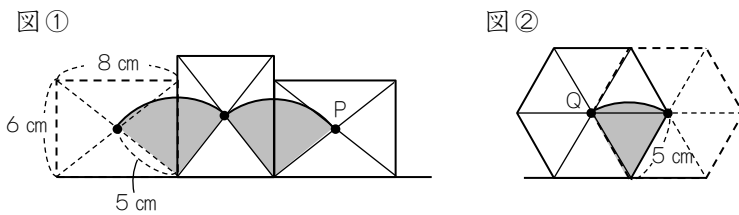


- (1) 正六角形は毎秒15度の速さで回転するとき、12秒後に正六角形の中心Qと、点AからBに向かう長方形の中心Pが重なりました。長方形は毎秒何度の速さで回転しますか。
- (2) 長方形は毎秒4度、正六角形は毎秒5度で転がるとき、長方形の中心Pと正六角形の中心Qがはじめて重なるのは、出発してから何秒後ですか。

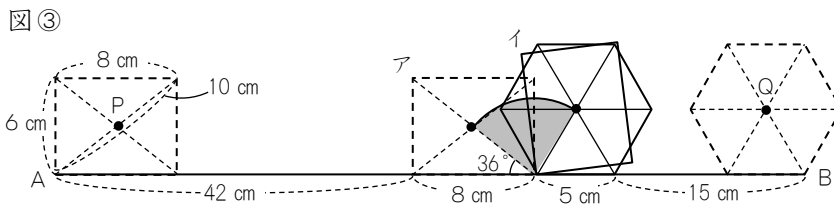
最難関問題

中心の重なり (1) 毎秒52度 (2) 264秒後

(1) 点Pは図①のように半径5cmで中心角90度のおうぎ形の弧を描き、点Qは図②のように半径5cmで中心角60度のおうぎ形の弧を描きます。

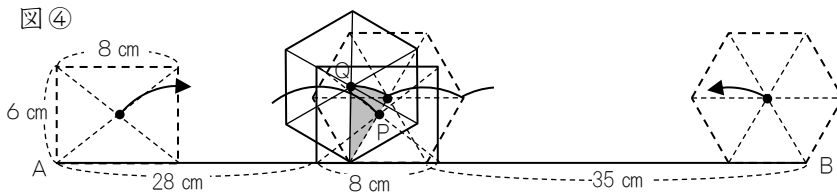


12秒後、正六角形は $15 \times 12 = 180$ (度) 回転するため、 $180 \div 60 = 3$ (回) 転がることで、 $5 \times 3 = 15$ (cm) 進んで図③の位置に進みます。このとき点PとQが重なることから、長方形はアの位置まで進み、さらにイの位置まで回転しています。アの位置まで進むのに長方形は、 $42 \div (8 + 6) = 3$ より、 $90 \times 2 \times 3 = 540$ (度) 回転します。また、影をつけた半径5cmのおうぎ形の中心角は $180 - (36 + 60) = 84$ (度) なので、全部で $540 + 84 = 624$ (度) 回転しています。よって、 $624 \div 12 = 52$ (度) より、毎秒52度です。



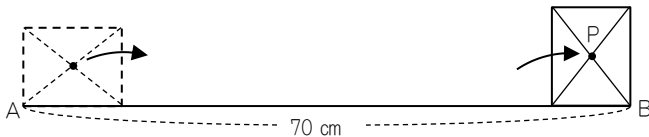
最難関問題

(2) (1) では長方形と正六角形があわせて $624 + 180 = 804$ (度) 回転しています。これに近いところで回転した角度が $4 : 5$ となるところを考えると、たとえば長方形が 360 度、正六角形が 450 度回転したときがあります。このとき、2つの図形は図④のようになります。

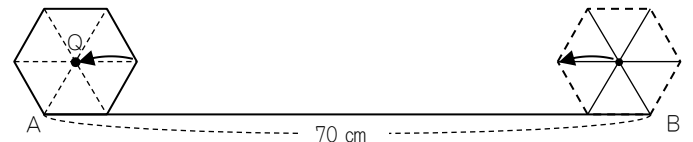


このようにして、点PとQは重なることなく行き違います。よって、長方形と正六角形がAB上を折り返した後を考えます。2つの図形が回転した角度は大体3倍ほどになるので、長方形が $360 \times 3 = 1080$ (度)、正六角形が $450 \times 3 = 1350$ (度) 回転したときを考えます。長方形は 810 度回転すると図⑤のように頂点が点Bと重なり、正六角形は 780 度回転すると図⑥のように頂点が点Aと重なります。

図⑤

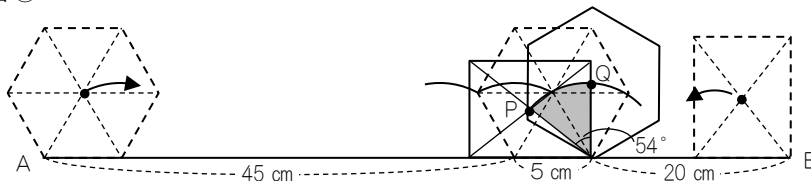


図⑥

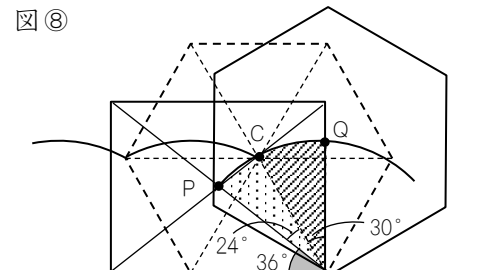


長方形が図⑤の状態から $1080 - 810 = 270$ (度)、正六角形が図⑥の状態から $1350 - 780 = 570$ (度) 回転すると、図⑦のようになります。図⑦では、点PとQの通過した跡が一部重なっています。図⑦で影をつけた中心角 54 度のおうぎ形に注目をする、点PとQの時間当たりに回転する角度の比が $4 : 5$ であることから、図⑤のように中心角 24 度のおうぎ形の弧を点Pが通過する間に、点Qは中心角 30 度の斜線部分のおうぎ形の弧を通過することがわかります。よって、点PとQは点Cの位置で重なっています。

図⑦



図⑧



点Pは出発してから、 $810 + 270 - 24 = 1056$ (度) 動いているので、 $1056 \div 4 = 264$ (秒後) に点PとQは初めて重なります。