受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

余りの余り

次の問いに答えなさい。

（１）１１，２２，３３，…，Ｘ，Ｙ，…と１１の倍数を並べていき，途中に連続して現れる２つの数を順にＸ，Ｙとします。

Ｘを１３１で割り，商を整数まで求めたときの余りをさらに１１で割って商を整数まで求めると，余りは８になりました。

Ｙを１３１で割り，商を整数まで求めたときの余りをさらに１１で割って商を整数まで求めると，余りは９になりました。

このようなＸ，Ｙの組として考えられるもののうち，もっとも小さいものを答えなさい。

（２）８５，１７０，２５５，…，Ｘ，Ｙ，…と８５の倍数を並べていき，途中に連続して現れる２つの数を順にＸ，Ｙとします。

Ｘを２０４８で割り，商を整数まで求めたときの余りをさらに８５で割って商を整数まで求めると，余りは４１になりました。

Ｙを２０４８で割り，商を整数まで求めたときの余りをさらに８５で割って商を整数まで求めると，余りは３３になりました。

①　Ｙ÷２０４８の商として考えられるもののうち，もっとも小さいものを答えなさい。

②　このようなＸ，Ｙの組として考えられるもののうち，もっとも小さいものを答えなさい。

最難関問題

余りの余り　（１）１１７７，１１８８　（２）①４９　②１００３００，１００３８５

（１）１１，２２，３３，…，１２１までは，１３１で割ると０余り１１，２２，３３，…，１２１となりますから，余りは１１の倍数です。よって，それを１１で割ると余りは０となります。

　１２１の次の１１の倍数は１２１＋１１＝１３２ですから，１３１で割ると，１余り１となり，余りは１です。１３２の次の１１の倍数は（１３２＋１１）ですから，１３１で割ると１余り（１＋１１）となるので，余りを１１で割ると，（１＋１１）÷１１＝１余り１となって，やはり余りは１となります。よって，次のような規則性を見ることができます。

11の倍数	11	…	121	132	…								…	11×131
÷131の余り	11	…	121	1	…	122	2	…	123	…	10	…	120	0
余りの余り	0	…	0	1	…	1	2	…	2	…	10	…	10	0
個数	11			12			12			…	12			

　１１の倍数を１３１で割った余りを１１で割ったときの余り，つまり「余りの余り」は０，１，２，…，１０と順に増えていくので，余りの余りが８である最後の数の次に，余りの余りが９である最初の数がきます。余りの余りが８である最後の数は，
１１＋１２×８＝１０７（番目）の１１の倍数ですから，１１×１０７＝１１７７，次の数は
１１７７+１１＝１１８８です。よって，X，Yの組として考えられるもののうち，もっとも小さいものは，１１７７，１１８８です。

最難関問題

（２）

①　（１）と同様に調べ始めると，次のようになります。

85 の倍数	85	…	2040	2125	…					
÷2048 の余り	85	…	2040	77	…	2032	69	…	2024	…
余りの余り	0	…	0	77	…	77	69	…	69	…
個数	24			24			24			…

８５の倍数を２０４８で割った余りを８５で割ったときの「余りの余り」の変化についてしっかりと考える必要がありそうです。２０４８÷８５＝２４余り８で，８５×２４＝２０４０ですから，余りの余りは０（＝８５），８５－８＝７７，その次は７７－８＝６９，…というように，８ずつ小さくなっていきます。よって，余りの余りは０，７７，６９，…，５となります。

85 の倍数	85～2040	2125～	…	…	…
÷2048 の余り	85～2040	77～2032	69～2024	…	５～2045
余りの余り	0	77	69	…	5

余りの余りが５となる最後の数は÷２０４８の余りが２０４５ですから，その次の数は÷２０４８の余りが２０４５＋８５－２０４８＝８２となり，余りの余りは８２÷８５＝０余り８２となります。これも，５＋８５－８＝８２より，余りの余りが５から８小さくなったと考えることができます。よって，余りの余りをさらに８で割った余りに注目すると，以下のようになります。

余りの余り	0	77～５	82～２	79～７	84～４	81～１	78～６	83～３	80～０
余りの余りの余り	0	0	2	7	4	1	6	3	0

Ｘの余りの余りは４１，Ｙの余りの余りは３３ですから，４１÷８＝５余り１，３３÷８＝４余り１より，Ｘは余りの余りの余りが１のグループの１＋（８１－４１）÷８＝６（番目），Ｙは７番目に入ることがわかります。

ここで，問題文で問われている÷２０４８の商に注目をすると，以下のようになります。

85の倍数	85～2040	2125～										
÷2048の商	0	1	2	…	10	11～21	22～31	32～42	43～53	54～63	64～74	75～85
÷2048の余り	85～2040	77～2032										
余りの余り	0	77	69	…	5	82～2	79～7	84～4	81～1	78～6	83～3	80～0
余りの余りの余り	0	5				2	7	4	1	6	3	0

よって，Ｙ÷２０４８の商は，４２＋７＝４９です。

最難関問題

②　ＸとＹが連続する８５の倍数であることから，Ｘは余りの余りが４１であるグループの最後の数，Ｙは余りの余りが３３であるグループの最初の数となります。余りの余りが３３であるグループは，２０４８で割ったときの余りが順に３３，３３＋８５＝１１８，１１８＋８５＝２０３，…となりますから，Ｙ÷２０４８＝４９余り３３です。よって，Ｙ＝２０４８×４９＋３３＝１００３８５，Ｘ＝１００３８５－８５＝１００３００です。