受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

回文分数の問題

$3\frac{1}{3}$，$178\frac{565}{871}$のような帯分数の既約分数で，整数部分を左右反対にすると分母と同じになり，整数部分-分子-分母の順に数を並べると，３１３，１７８５６５８７１のように左から読んでも右から読んでも同じになる分数を，回文分数とよぶことにします。

（１）１０より大きい回文分数のうち，最も小さいものと，小さいほうから３０番目のものを答えなさい。

（２）１００００未満の回文分数のうち，最も大きいものと，大きいほうから５０番目のものを答えなさい。

最難関問題

回文分数の問題　（１）$11\frac{1}{11}$，$14\frac{4}{41}$　（２）$9999\frac{989}{9999}$，$9999\frac{7}{9999}$

（１）整数部分が１０の場合，回文分数は$10\frac{\boxed{}}{01}$となってしまうので，帯分数になりません。よって，

整数部分が１１の場合の$11\frac{1}{11}$が最小です。ここから，順を追って３０番目を求めます。

$11\frac{\boxed{}}{11}$

$\boxed{}$には１～９の９個の整数が入るので，回文分数は９個あります。

$12\frac{\boxed{}}{21}$

$\boxed{}$には１～９の９個の整数のうちで３か７の倍数ではない５個の整数と１１が入るので，
回文分数は６個あります。

$13\frac{\boxed{}}{31}$

$\boxed{}$には１～９の９個の整数と１１，２２が入るので，回文分数は１１個あります。

$14\frac{\boxed{}}{41}$

ここまでで９＋６＋１１＝２６（個）の回文分数があるので，３０－２６＝４（番目）を求めて，

$14\frac{4}{41}$です。

最難関問題

（２）１００００未満の範囲で最大なので，$9999\frac{\square}{9999}$を考えます。ここで分母の９９９９を素因数分解すると，３×３×１１×１０１ですから，□には３，１１，１０１の倍数ではない数が入ります。この点に注意をして□に入る数を大きいほうから探していきます。まず，９９９９は自明に入りません。次に，９８８９，９７７９，…，９００９は，９９９９から１１０＝１１×１０をいくつか引いてできる数なので，１１の倍数ですから，□には入りません。

次に，８９９８は９９９９から１００１を引いた数ですが，１００１÷１１＝９１より１００１は１１の倍数なので，８９９８も１１の倍数であり，８８８８，８７７８，…，８００８も１１の倍数となります。以降も同様ですから，４桁の場合はすべて１１の倍数であり，□に入れることはできません。

よって，３桁の分子を考えます。９９９は３の倍数ですから□には入りません。９８９は３，１１，１０１のどれでも割ることができませんから，$9999\frac{989}{9999}$が最大です。ここから，順を追って５０番目を求めます。

分子が９□９の場合

１０１…９０９は１０１の倍数なので，□に０は入りません。なお，これは８０８，７０７，…の場合も同様ですから，以下において□に入れる候補から０は除きます。

１１…９７９は９７９÷１１＝８９より１１の倍数です。

３…９３９，９６９，９９９は３の倍数です。

以上より，□に入る数は１，２，４，５，８の５個です。

分子が８□８の場合

１１…９７９から１１の倍数である１２１を引いた８５８は１１の倍数です。

３…８２８，８５８，８８８は３の倍数です。

以上より，□に入る数は９－３＝６（個）です。

分子が７□７の場合

１１…８５８から１２１を引いた７３７は１１の倍数です。

３…７１７，７４７，７７７は３の倍数です。

以上より，□に入る数は９－４＝５（個）です。

最難関問題

分子が６□６の場合
１１…７３７から１２１を引いた６１６は１１の倍数です。
３…６３６，６６６，６９６は３の倍数です。
以上より，□に入る数は９－４＝５（個）です。

分子が５□５の場合
１１…６１６から１２１を引くと４９５になります。５□５の形をした１１の倍数はありません。
３…５２５，５５５，５８５は３の倍数です。
以上より，□に入る数は９－３＝６（個）です。

分子が４□４の場合
１１…上の４９５から１１を引いた４８４は１１の倍数です。
３…４１４，４４４，４７４は３の倍数です。
以上より，□に入る数は９－４＝５（個）です。

分子が３□３の場合
１１…４８４から１２１を引いた３６３は１１の倍数です。
３…３３３，３６３，３９３は３の倍数です。
以上より，□に入る数は９－３＝６（個）です。

分子が２□２の場合
１１…３６３から１２１を引いた２４２は１１の倍数です。
３…２２２，２５２，２８２は３の倍数です。
以上より，□に入る数は９－４＝５（個）です。

分子が１□１の場合
１１…１２１は１１の倍数です。
３…１１１，１４１，１７１は３の倍数です。
以上より，□に入る数は９－４＝５（個）です。

ここまでで，回文分数は５×６＋６×３＝４８（個）あります。

最難関問題

　次に，分子が２桁の場合ですが，２桁の分子は１１，２２，…，９９となってすべて１１の倍数ですから，条件を満たしません。よって，１桁の分子で３の倍数ではないものを大きい順に並べて，８，７，となるので，７が求める分子です。よって，大きいほうから５０番目の回文分数は，

$9999\frac{7}{9999}$です。