

切手（剰余類）のずらしの問題・2

ある地方では、1円、2円、3円、…、99円、100円、と金額が円の単位で1以上100以下の整数にあたる切手が発行されています。

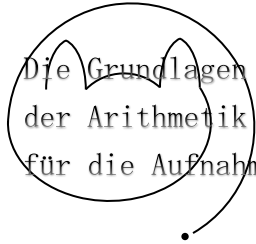
5円切手1枚か6円切手何枚かを用いると、右の図において○をつけた金額を作ることができます。○をつけた金額に5を次々と加えてできる金額は、5円切手を加えることで作ることができるので、5円切手か6円切手を組み合わせることで、影をつけた $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ （通り）の金額を除いてあらゆる金額を作ることができます。

1	6	11	16	21	26	...
2	7	12	17	22	27	...
3	8	13	18	23	28	...
4	9	14	19	24	29	...
5	10	15	20	25	30	...

このことを参考に、以下の問いに答えなさい。

- (1) 5円切手と7円切手を組み合わせても作ることができない金額は何通りありますか。また、5円切手と9円切手を組み合わせても作ることができない金額は何通りありますか。
- (2) 5円切手と 円切手を組み合わせても作ることができない金額が以下の数である場合、 にあてはまる数を答えなさい。ない場合は、「ない」と答えなさい。
- ① 55通り
 - ② 66通り
 - ③ 88通り
- (3) 10円切手と 円切手を組み合わせても作ることができない金額が以下の数である場合、 にあてはまる数を答えなさい。ない場合は、「ない」と答えなさい。
- ① 198通り
 - ② 252通り

受験算数の基礎



最難関問題

切手（剰余類）のずらしの問題・2

(1) 7円…12通り, 9円…16通り (2) ①ない ②34 ③ない (3) ①ない ②57

(1) 5円切手と7円切手の場合は図①のようになって, $4 + 1 + 5 + 2 = 12$ (通り), 5円切手と9円切手の場合は図②のようになって, $7 + 5 + 3 + 1 = 16$ (通り) です。

図①

1	6	11	16	21	26	31	▶	...
2	7	12	17	22	27	32	▶	...
3	8	13	18	23	28	33	▶	...
4	9	14	19	24	29	34	▶	...
5	10	15	20	25	30	35	▶	...

図②

1	6	11	16	21	26	31	36	41	▶	...
2	7	12	17	22	27	32	37	42	▶	...
3	8	13	18	23	28	33	38	43	▶	...
4	9	14	19	24	29	34	39	44	▶	...
5	10	15	20	25	30	35	40	45	▶	...



最難関問題

(2) 5円切手と 円切手を組み合わせるとき、 にあてはまる数を1つずつ大きくするとどのように、作ることができない金額が増えていくかを考えます。5で割ったときの余りが1となるようなある整数を①とします。①を1つ大きくした数は5で割ったときの余りが2となるので②, ②を1つ大きくした数は5で割ったときの余りが3となるので③, …というようにして, ④までを考えます。これらを表に書き込むと, 図③のようになります。

なお, にあてはまる数が5の倍数の場合は明らかに作ることができない金額が無限になってしまうので, 考えません。

次に, ①~④を2倍した数を, 表記は①~④のまま表に書き込むと, 図④のようになります。①は5で割って1余る数なので, 2倍すると5で割って2余る数となります。②以降も同様に考えます。

①~④を3倍した数を書き込むと図⑤のようになり, 4倍した数を書き込むと図⑥のようになります。

図③

1	...	①		
2	...	②		
3	...	③		
4	...	④		
5	...			

図④

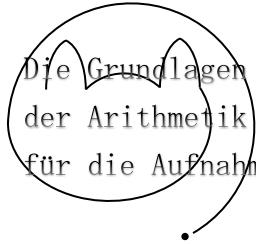
1	...	①	...		③
2	...	②	...	①	
3	...	③	...		④
4	...	④	...	②	
5		

図⑤

1	...	①	...		③	...		②	
2	...	②	...	①		...			④
3	...	③	...		④	...	①		
4	...	④	...	②		...		③	
5			

図⑥

1	...	①	...		③	...		②		...				④
2	...	②	...	①		...			④	...			③	
3	...	③	...		④	...	①			...		②		
4	...	④	...	②		...		③		...	①			
5				



最難関問題

ここで①と②を比べると，図⑦のようになります。影をつけたのはそれぞれを3，4倍した数で，表の列が1つずつずれています。よって，5円切手と①の金額の切手を組み合わせた場合より，②の金額の切手を組み合わせた場合の方が，作ることができない金額が2つ増えます。

②と③，③と④を比べても，やはり5円切手と組み合わせた場合に作ることができない金額が2つ増えます。

図⑦

1	...	①	...		③	...		②		...				④
2	...	②	...	①		...			④	...				③
3	...	③	...		④	...	①			...		②		
4	...	④	...	②		...		③		...	①			
5				

また，①より5多い数，つまりは①の次の5で割って余りが1となる数の場合，①との差が5，10，15，...と①より列が1つ，2つ，3つ...ずれていくので，5円切手と組み合わせた場合に作ることができない金額は， $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ （個）増えます。

こうして，5円切手と6円切手を組み合わせたところから順に7円切手，8円切手，...と金額を1つ増やすごとに作ることができない金額は2つずつ増えていくことになります。ただし，5の倍数の金額の切手の場合のみは作ることができない金額が無限になります。

①の55通りの場合，作ることができない金額は6円切手のときの10通りから2ずつ増えていって必ず2の倍数になるので，条件を満たす金額の切手はありません。

②の66通りの場合， $(66 - 10) \div 2 = 28$ ， $6 + 28 = 34$ となって34円切手です。

③の88通りの場合， $(88 - 10) \div 2 = 39$ ， $6 + 39 = 45$ となって45円切手となってしまいますが，45は5の倍数なので，条件を満たしません。

