受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

最大公約数と最小公倍数

いくつかの異なる整数の最大公約数と最小公倍数を求めたところ，それぞれ１２と３６０でした。

（１）このような整数の個数は，最大で何個ですか。

（２）整数の個数が５個のとき，５個の整数の組合せとして考えられるものは何通りありますか。

（３）整数の個数が４個のとき，４個の整数の組合せとして考えられるものは何通りありますか。

（４）整数の個数が３個のとき，３個の整数の組合せとして考えられるものは何通りありますか。

受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

最大公約数と最小公倍数　（１）８個　（２）５６通り　（３）６４通り　（４）３２通り

（１）素因数分解をすると，１２＝２×２×３，３６０＝２×２×２×３×３×５です。１２を約数とする整数は，素因数分解をすると２×２×３×□という形になります。ただし，□は１でもよいものとします。３６０の素因数分解をこの形に書き直すと，２×２×３×$\boxed{2\times3\times5}$となります。
１２を約数とし，３６０を倍数とするような数は□の部分が，
１，２，３，５，２×３，２×５，３×５，２×３×５，のいずれかですから，８個です。

（２）（１）で考えた，８個の整数を見やすく並べると，次のようになります。

	□の部分				
１２×	1				
１２×	2				
１２×			3		
１２×					5
１２×	2	×	3		
１２×	2		×		5
１２×			3	×	5
１２×	2	×	3	×	5

８個の整数の□の部分の最大公約数は１，最小公倍数は２×３×５ですから，８個の整数の最大公約数は１２×１＝１２，最小公倍数は１２×２×３×５＝３６０となります。

（２）以降はこの８個の整数からいくつかを選ぶ問題です。例えば，８個の整数から１２×２と１２×２×３の２個を選んだ場合，□の部分の最大公約数は２，最小公倍数は２×３ですから，２個の整数の最大公約数は１２×２＝２４，最小公倍数は１２×２×３＝７２となって，問題の条件にあいません。

このように，８個の整数からいくつかを選ぶ場合，選んだ整数の□の部分の最大公約数が１，最小公倍数が２×３×５となることが求められます。

□の部分に入る８個の数，１，２，３，５，２×３，２×５，３×５，２×３×５において，素数の２，３，５はいずれも４個の数に現れ，残り４個の数には現れません。よって，８個の数から５個を選ぶ場合，そのすべてに２か３か５が現れることはないので，最大公約数は１となります。また，２も３も５も必ず５個の数のいずれかには表れますから，最小公倍数は２×３×５となります。

よって，８個から５個を自由に選べばよいので，「選ばない３個を選ぶ」と考えて，

$\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$＝５６（通り）です。

最難関問題

（３）同様にして，□の部分に入る，１，２，３，５，２×３，２×５，３×５，２×３×５から４個を選ぶことを考えます。８個から４個を自由に選ぶ方法は，$\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}$＝７０（通り）です。ここから，条件に反するものを除きます。

素数の２，３，５はいずれも４個の数に現れるので，例えば２が現れる４個の数，２，２×３，２×５，２×３×５を選ぶと，最大公約数が２となってしまい条件に反します。３，５の場合も同様ですから，３通りが条件に反します。また，素数の２，３，５はいずれも４個の数に現れないので，例えば２が現れない４個の数，１，３，５，３×５を選ぶと，最小公倍数が３×５となってしまい条件に反します。３，５の場合も同様ですから，３通りが条件に反します。以上の３＋３＝６（通り）に重複はないので，７０－６＝６４（通り）です。

（４）同様にして，□の部分に入る，１，２，３，５，２×３，２×５，３×５，２×３×５から３個の数を選ぶことを考えます。８個から３個を自由に選ぶ方法は，$\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$＝５６（通り）です。ここから，条件に反するものを除きます。

まず，最大公約数が１にならない場合を考えます。最大公約数が２になるのは，２，２×３，２×５，２×３×５から３個の数を選ぶ場合ですから，４通りです。この４通りのいずれの選び方においても，３か５が３個の数すべてに現れることはないので，最大公約数が２×３や２×５になることはありません。よって，重複なく，最大公約数が２，３，５のいずれかになる場合がそれぞれ４通りありますから，４×３＝１２（通り）です。

次に，最小公倍数が２×３×５にならない場合を考えます。選んだ３個の数のいずれにも２，３，５のいずれかが含まれなければよいので，例えば２が含まれない場合は，１，３，５，３×５から３個の数を選べばよいので，４通りです。この４通りのいずれの選び方においても，３か５が３個の数全てに現れないことはありませんし，最大公約数が１以外になることもありません。よって，重複なく，２，３，５のいずれかが含まれない場合がそれぞれ４通りありますから，４×３＝１２（通り）です。

以上より，５６－１２×２＝３２（通り）です。

なお，たかだか３２通りですから，樹形図で調べ上げて解いても全く問題ありません。