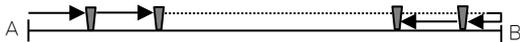


## 最難関問題

### 往復の等分割

太郎君は、A B間を何度も往復しながら、決まった距離を進むごとに杭を打ちます。ただし、一度杭を打った場所に2本目の杭は打ちません。



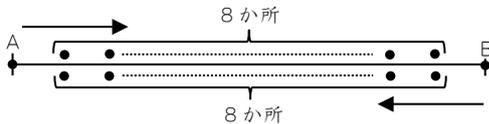
- (1) A B間の距離が720 mで、80 mごとに杭を打っていくと、杭は何本まで打つことができますか。
- (2) A B間の距離が720 mで、 mごとに杭を打っていくと、杭は10本まで打つことができます。にあてはまる1440未満の数は何個ありますか。
- (3) A B間の距離が mで、80 mごとに杭を打っていくと、杭は10本まで打つことができます。にあてはまる80より大きい数は何個ありますか。
- (4) A B間の距離がア mで、イ mごとに杭を打っていくと、杭はウ本まで打つことができます。イにはA B間の距離の2倍未満の数が入ります。アとイにあてはまる数の組み合わせが10000通り以上となるとき、ウにあてはまる最小の整数を答えなさい。

最難関問題

往復の等分割 (1) 10本 (2) 24 (3) 24 (4) 40

(1) A B間を一往復すると、 $720 \times 2 = 1440$  (m) になるので、 $1440$ の整数倍の距離を進むとA地点に杭が打たれ、以降は杭の本数は増えないようになります。 $80$ は $1440$ の約数なので、一往復するとA地点に杭が打たれます。それまでに、太郎君は $80$  m進むことを $1440 \div 80 = 18$  (回) 繰り返します。太郎君はB地点にも杭を打つので、太郎君が $80$  m進む地点は、図①のような18か所です。

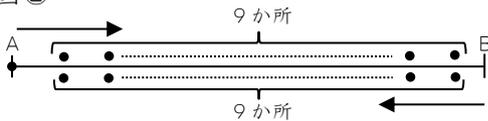
図①



2地点A, Bを除く、間の地点は行きと帰りで重なるので、杭の本数は $1 + 8 + 1 = 10$  (本) です。

(2) 杭を打つことを繰り返してA地点に杭を打って終わるまでの太郎君の進み方を、終わりから逆向きに見ても、A地点から  m ずつ進むだけなので、もともとの動きと違いはありません。この対称性により、杭を10本打つような進み方は図①と図②の2パターンに分けられます。

図②



図①の場合、隣り合う●の間の道のりは $80$  mです。 $80$  mずつ進めば●すべてに止まることができますが、例えば $80 \times 17 = 1360$  (m) ずつ進んでもすべてに止まることができます。これは円周上に等間隔に並ぶ18個の点すべてに止まる進み方の問題と同値なので、18と互いに素な個数である、1個、5個、7個、11個、13個、17個ずつ進む場合があてはまります。よって、6通りです。

図②の場合、 $1440 \div 19 = \frac{1440}{19}$  (m) 毎に点が打たれています。図①の場合と同様に、円

周上に等間隔に並ぶ19個の点すべてに止まる進み方の問題と考えると、19は素数なので、1個～18個のすべてがあてはまります。

以上より、 $6 + 18 = 24$  (通り) です。



## 最難関問題

(3) 杭を10本打つのは、A B間の道のりが何mであろうと、図①と図②の24通りです。

図①の場合であればA B間の距離の2倍の $\frac{1}{18}, \frac{5}{18}, \frac{7}{18}, \frac{11}{18}, \frac{13}{18}, \frac{17}{18}$ 倍ずつ進み、

図②の場合であればA B間の距離の2倍の $\frac{1}{19} \sim \frac{18}{19}$ 倍ずつ進むので、80mずつ進む場合のA B間の距離は、80をこれらの割合で割った24通りが考えられます。

(4) (2) (3) から、が定まった場合のとにあてはまる数の個数は等しいので、 $10000 = 100 \times 100$ より、およびが100以上になる場合を考えます。

図①の18分割と図②の19分割のように、往復の距離の分割は連続する偶数と奇数による分割となり、進み方は偶数及び奇数を分母とする既約分数の個数だけ存在します。よって、分母が連続する偶数と奇数で、既約分数の個数があわせて100個以上になる分数の組を探せばよいことになります。分母が偶数の分数の既約分数の個数は(分母÷2)以下なので、偶数分母の既約分数が33個、奇数分母の

既約分数が66個となる可能性のある $\frac{\square}{66}$ と $\frac{\square}{67}$ より後を考えます。

$\frac{\square}{68}$ と $\frac{\square}{69}$ …分母69の既約分数は分子が3の倍数ではないものを考えただけでも46個以下なので条件を満たしません。

$\frac{\square}{70}$ と $\frac{\square}{71}$ …分母70の既約分数は24個、分母71の既約分数は70個で、条件を満たしません。以降同様に探していくと…

$\frac{\square}{78}$ と $\frac{\square}{79}$ …分母78の既約分数は24個、分母79の既約分数は78個で、条件を満たします。

往復の距離の78分割および79分割になるのは、

$(78 - 2) \div 2 + 2 = (79 - 1) \div 2 + 1 = 40$ より、杭を40本打てる場合です。