

最難関問題

直線が通過する点の個数・2

100個の点が等間隔に、図1のようにたて横10列に並んでいます。図2のように、そのうちの2点を結ぶ直線を引きます。このとき、他の点を直線が通過しないようにします。

このような直線は何本引くことができますか。なお、直線とは無限にまっすぐ延びる線です。

図1

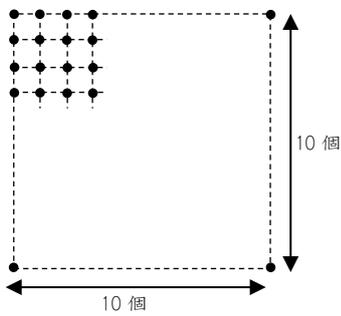
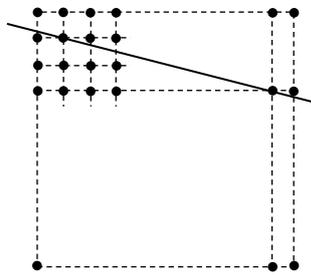


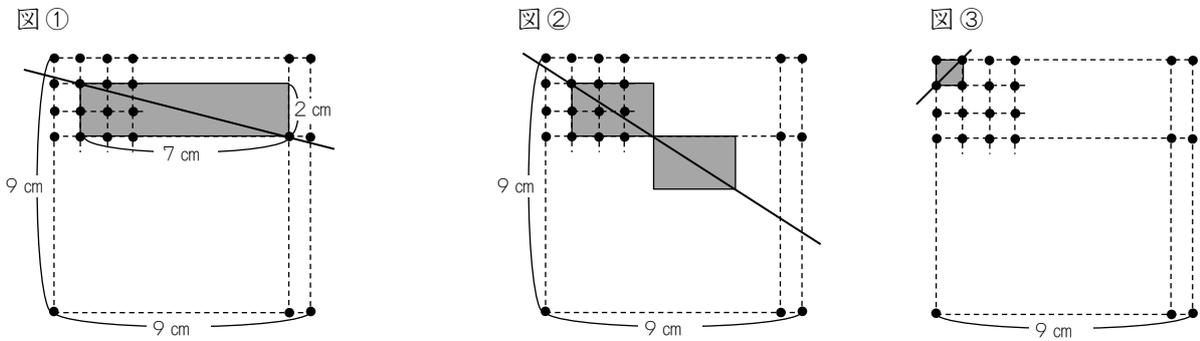
図2



最難関問題

直線が通過する点の個数・2 1900本

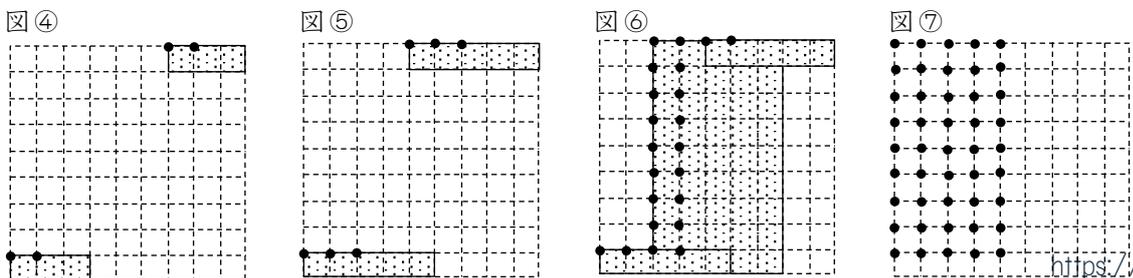
点が1cm間隔で並んでいることにします。問題中の図2の直線は、図①のように、たて2cm、横7cmの長方形の対角線です。この直線が2点のみを通過する理由は、
 ○2と7が互いに素なので、長方形の内部の点を通らない
 ○図②のように直線上に合同な長方形をはみ出さずに置くことができない
 という2つの条件を満たしているからです。



このような条件を満たす長方形の置き方に注目して、場合分けをします。また、図①、②のように、長方形のたてよりも横が長く、直線が右下がりの場合のみを考え、最後に4倍して答えを求めることにします。図③の正方形の対角線の4通りも加えます。

たて1cmの場合

- 横2cm…図④では、たて1cm横2cmの長方形の左上の頂点を置ける位置を●で表しています。ずらして2通り、上下で2通りなので、 $2 \times 2 = 4$ （通り）です。
- 横3cm…図⑤のようになるので、ずらして3通り、上下で2通りなので、 $3 \times 2 = 6$ （通り）です。
- 横4cm… $9 - 4 = 5$ 、 $5 = 2 + 3$ であることから、長方形の両側を2cm、3cmにすると、図⑥のように最上段・最下段以外にも長方形を配置できるので、 $4 \times 2 + 2 \times 7 = 22$ （通り）です。
- 横5cm…5cmは9cmの半分より大きいので、図②のように合同な長方形をもう1個配置することはできません。図⑦のようになって、 $5 \times 9 = 45$ （通り）です。



最難関問題

- 横 6 cm… 5 cm の場合と同様に, $4 \times 9 = 36$ (通り) です。
 - 横 7 cm… $3 \times 9 = 27$ (通り) です。
 - 横 8 cm… $2 \times 9 = 18$ (通り) です。
 - 横 9 cm… $1 \times 9 = 9$ (通り) です。
- あわせて, $4 + 6 + 22 + 9 \times (5 + 4 + 3 + 2 + 1) = 167$ (通り) です。

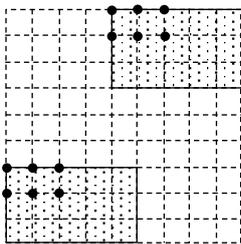
たて 2 cm の場合

- 横 3 cm… 図⑧のように, $3 \times 2 \times 2 = 12$ (通り) です。
 - 横 5 cm… 図⑦の場合より, 上下のずらしが 1 段少ないので, $5 \times 8 = 40$ (通り) です。
 - 横 7 cm… $3 \times 8 = 24$ (通り) です。
 - 横 9 cm… $1 \times 8 = 8$ (通り) です。
- あわせて, $12 + 8 \times (5 + 3 + 1) = 84$ (通り) です。

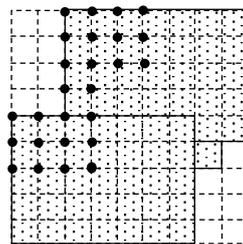
たて 3 cm の場合

- 横 4 cm… 図⑨のように, $4 \times 3 \times 2 + 2 = 26$ (通り) です。
 - 横 5 cm… $5 \times 7 = 35$ (通り) です。
 - 横 7 cm… $3 \times 7 = 21$ (通り) です。
 - 横 8 cm… $2 \times 7 = 14$ (通り) です。
- あわせて, $26 + 7 \times (5 + 3 + 2) = 96$ (通り) です。

図⑧



図⑨



たて 4 cm の場合

- 横 5 cm… $5 \times 6 = 30$ (通り) です。
 - 横 7 cm… $3 \times 6 = 18$ (通り) です。
 - 横 9 cm… $1 \times 6 = 6$ (通り) です。
- あわせて, $6 \times (5 + 3 + 1) = 54$ (通り) です。

最難関問題

たて 5 cm の場合

- 横 6 cm... $4 \times 5 = 20$ (通り) です。 ○横 7 cm... $3 \times 5 = 15$ (通り) です。
○横 8 cm... $2 \times 5 = 10$ (通り) です。 ○横 9 cm... $1 \times 5 = 5$ (通り) です。
あわせて、 $5 \times (4 + 3 + 2 + 1) = 50$ (通り) です。

たて 6 cm の場合

- 横 7 cm... $3 \times 4 = 12$ (通り) です。

たて 7 cm の場合

- 横 8 cm... $2 \times 3 = 6$ (通り) です。 ○横 9 cm... $1 \times 3 = 3$ (通り) です。

たて 8 cm の場合

- 横 9 cm... $1 \times 2 = 2$ (通り) です。

以上より、 $167 + 84 + 96 + 54 + 50 + 12 + 6 + 3 + 2 = 474$ (本)、
 $474 \times 4 + 4 = 1900$ (本) です。