

最難関問題

かけ算数

5けたの整数34560は、左から順に1けたの整数どうしのかけ算をして、 $3 \times 4 \times 5 = 60$ とできます。また、11111は $1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ 、13050は $1 \times 3 \times 0 \times 5 = 0$ とできます。このように、左から順に1けたの整数どうしのかけ算をして正しい式になる整数を、「かけ算数」とよぶことにします。

00や09は整数とはいえないので、10000は $1 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$ とできますが、 $1 \times 0 \times 0 = 00$ とはできませんし、91109を $9 \times 1 \times 1 = 09$ とはできません。また、1けたの整数どうしのかけ算なので、12560を $12 \times 5 = 60$ とはできません。次の問いに答えなさい。

(1) 3けたのかけ算数は全部で何個ありますか。

(2) 4けたのかけ算数は全部で何個ありますか。

最難関問題

かけ算数 (1) 32個 (2) 273個

(1) 3けたの整数を $\bigcirc\triangle\Box$ とすると、 $\bigcirc\times\triangle=\Box$ となります。

0を含むかけ算の場合

$\bigcirc\triangle\Box$ が3けたの整数であることから、 \bigcirc は0ではありません。よって、 $\triangle=0$ の場合を考えます。このとき、 $\bigcirc\times 0=0$ より、 $\Box=0$ となります。 \bigcirc には1から9までの整数が入るので、3けたのかけ算数 $\bigcirc\triangle\Box$ は9個あります。

0を含まず1を含むかけ算の場合

\bigcirc が1の場合、 $1\times\triangle=\triangle$ より、 $\Box=\triangle$ となります。 \triangle には1から9までの整数が入るので、9通りです。 \triangle が1の場合は $\bigcirc\times 1=\bigcirc$ より、 $\Box=\bigcirc$ となり、同様に9通りです。ただし、111が重複するので、 $9\times 2-1=17$ より、3けたのかけ算数 $\bigcirc\triangle\Box$ は17個あります。

0も1も含まないかけ算の場合

$\bigcirc\triangle\Box$ が224...1通り、236...2と3を入れかえて2通り、248...2通り、339...1通りより、あわせて $(1+2)\times 2=6$ より、3けたのかけ算数 $\bigcirc\triangle\Box$ は6個あります。

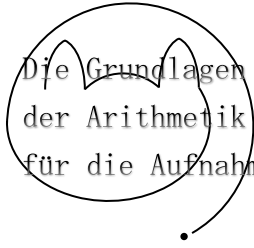
以上より、3けたのかけ算数 $\bigcirc\triangle\Box$ は $9+17+6=32$ (個)あります。

(2) 4けたの整数を $\bigcirc\triangle\Box\star$ とすると、 $\bigcirc\times\triangle\times\Box=\star$ の場合と、 $\bigcirc\times\triangle=\Box\star$ の場合が考えられます。

■ $\bigcirc\times\triangle\times\Box=\star$ の場合

\triangle, \Box が0を含む場合

$\star=0$ となります。 \bigcirc には1から9までの整数が入ります。 \triangle と \Box については、どちらにも0が入らない余事象を考えます。よって、 $9\times(10\times 10-9\times 9)=171$ (個)です



最難関問題

※以下では、 $\circ\triangle\square$ はいずれも0ではない場合を考えます。

$\circ, \triangle, \square$ がすべて1の場合

$1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$ より、1 1 1 1の1個です。

$\circ, \triangle, \square$ のうち2つが1の場合

$\circ \times 1 \times 1 = \circ$ より、 $\star = \circ$ となります。このとき、 \circ には2から9までの整数が入るので、4けたの整数 $\circ\triangle\square\star$ は8個あります。 $1 \times \triangle \times 1 = \triangle$ のときも $1 \times 1 \times \square = \square$ の場合も同様ですから、 $8 \times 3 = 24$ (個) です。

$\circ, \triangle, \square$ のうち1つが1の場合

$\circ\triangle\square\star$ が1 2 2 4...並べかえて3通り、1 2 3 6...6通り、1 2 4 8...6通り、1 3 3 9...3通りより、あわせて $(3 + 6) \times 2 = 18$ より、18個です。

$\circ, \triangle, \square$ がすべて1ではないの場合

2 2 2 8のみですから、1個です。

よって、 $\circ \times \triangle \times \square = \star$ の場合は、 $1 + 7 + 1 + 1 + 24 + 18 + 1 = 215$ (個) あります。

■ $\circ \times \triangle = \square \star$ の場合

$\circ \times \triangle$ が2けたになればよいので、かけ算九九において積が2けたになる場合を求めればよいことがわかります。九九の中で積が1けたになるのは、1の段...9組、2の段...4組、3の段...3組、4の段...2組、5の段以上...それぞれ1組ですから、 $9 \times 9 - (9 + 4 + 3 + 2 + 1 \times 5) = 58$ (個) です。

以上より、4けたのかけ算数 $\circ\triangle\square\star$ は、 $215 + 58 = 273$ (個) あります。