

$2 \times 2 \times 7 + 0$ は完全数

2027の各位の数を並びかえて、その間に+か×を入れて式を作り、その計算結果が最大になるようにすると、 $2 \times 2 \times 7 + 0 = 28$ という完全数になります。完全数とは、約数の和が自分自身の2倍になる整数で、28の場合は $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 28 \times 2$ 、となります。

以下の問いに答えなさい。28以外の完全数は小さい順に、6, 496, 8128, 33550336, ...です。

(1) 各位の数を並びかえて、その間に+か×を入れて式を作り、その計算結果が最大になるようにすると完全数になるような2けたの整数は何個ありますか。

(2) 各位の数を並びかえて、その間に+か×を入れて式を作り、その計算結果が最大になるようにすると完全数になるような3けたの整数は何個ありますか。

(3) 各位の数を並びかえて、その間に+か×を入れて式を作り、その計算結果が最大になるようにすると完全数になるような10以上99999以下の整数は何個ありますか。

$2 \times 2 \times 7 + 0$ は完全数 (1) 7 個 (2) 25 個 (3) 269 個

(1) 計算結果となる完全数ごとに場合分けします。

計算結果が 6

$0 + 6 = 6$ となる (0, 6) の並びかえ... 60 の 1 個

$1 + 5 = 6$ となる (1, 5) の並びかえ... $2 \times 1 = 2$ (個)

$2 \times 3 = 6$ となる (2, 3) の並びかえ... 2 個 よって, $1 + 2 + 2 = 5$ (個) です。

計算結果が 28

たし算の式の最大値は $9 + 9 = 18$ なので, かけ算の場合を考えます。

$4 \times 7 = 28$ となる (4, 7) の並びかえ... 2 個 よって, 2 個です。

計算結果が 496

かけ算の式の最大値は $9 \times 9 = 81$ なので, 計算結果が 496 以上の完全数になることはありません。

以上より, $5 + 2 = 7$ (個) です。

(2)

計算結果が 6

$0 + 0 + 6 = 6$ となる (0, 0, 6) の並びかえ... 1 個

$0 + 1 + 5 = 6$ となる (0, 1, 5) の並びかえ... $2 \times 2 \times 1 = 4$ (個)

$1 + 1 + 4 = 6$ となる (1, 1, 4) の並びかえ... 3 個

$0 + 2 \times 3 = 6$ となる (0, 2, 3) の並びかえ... 4 個 よって, $1 + 4 + 3 + 4 = 12$ (個) です。

計算結果が 28

たし算の最大値は $9 + 9 + 9 = 27$ なので, かけ算を含む場合を考えます。

$0 + 4 \times 7 = 28$ となる (0, 4, 7) の並びかえ... 4 個

$1 + 3 \times 9 = 28$ となる (1, 3, 9) の並びかえ... $3 \times 2 \times 1 = 6$ (個)

$2 \times 2 \times 7 = 28$ となる (2, 2, 7) の並びかえ... 3 個 よって, $4 + 6 + 3 = 13$ (個) です。

計算結果が 496

足し算とかけ算を含む式の最大は $9 + 9 \times 9 = 90$ なので, かけ算のみの式を考えます。ところが, 素因数分解をすると $496 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 31$ なので, 1 けたの整数 3 個の積が 496 になることはありません。

計算結果が8 1 2 8

全ての式の最大値は $9 \times 9 \times 9 = 729$ なので、計算結果が8 1 2 8以上の完全数になることはありません。

以上より、 $12 + 13 = 25$ （個）です。

(3)

計算結果が6となる4けたの整数

$0 + 0 + 0 + 6 = 6$ となる(0, 0, 0, 6)の並びかえ…1個

$0 + 0 + 1 + 5 = 6$ となる(0, 0, 1, 5)の並びかえ… $2 \times 3 = 6$ （個）

$0 + 1 + 1 + 4 = 6$ となる(0, 1, 1, 4)の並びかえ… $6 + 3 = 9$ （個）

$1 + 1 + 1 + 3 = 6$ となる(1, 1, 1, 3)の並びかえ…4個

$1 + 1 + 2 + 2 = 6$ となる(1, 1, 2, 2)の並びかえ… $4 \times 3 \div (2 \times 1) = 6$ （個）

$0 + 0 + 2 \times 3 = 6$ となる(0, 0, 2, 3)の並びかえ…6個

よって、 $1 + 6 + 9 + 4 + 6 + 6 = 32$ （個）です。

計算結果が6となる5けたの整数

$0 + 0 + 0 + 0 + 6 = 6$ となる(0, 0, 0, 0, 6)の並びかえ…1個

$0 + 0 + 0 + 1 + 5 = 6$ となる(0, 0, 0, 1, 5)の並びかえ… $2 \times 4 = 8$ （個）

$0 + 0 + 1 + 1 + 4 = 6$ となる(0, 0, 1, 1, 4)の並びかえ… $12 + 6 = 18$ （個）

$0 + 1 + 1 + 1 + 3 = 6$ となる(0, 1, 1, 1, 3)の並びかえ… $12 + 4 = 16$ （個）

$0 + 1 + 1 + 2 + 2 = 6$ となる(0, 1, 1, 2, 2)の並びかえ… $2 \times 12 = 24$ （個）

$1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6$ となる(1, 1, 1, 1, 2)の並びかえ…5個

$0 + 0 + 0 + 2 \times 3 = 6$ となる(0, 0, 0, 2, 3)の並びかえ…8個

よって、 $1 + 8 + 18 + 16 + 24 + 5 + 8 = 80$ （個）です。

計算結果が28となる4けたの整数

$0 + 0 + 4 \times 7 = 28$ となる(0, 0, 4, 7)の並びかえ…6個

$0 + 1 + 3 \times 9 = 28$ となる(0, 1, 3, 9)の並びかえ… $3 \times 3 \times 2 \times 1 = 18$ （個）

$0 + 2 \times 2 \times 7 = 28$ となる(0, 2, 2, 7)の並びかえ… $6 + 3 = 9$ （個）

$1 + 3 \times 3 \times 3 = 28$ となる(1, 3, 3, 3)の並びかえ…4個

よって、 $6 + 18 + 9 + 4 = 37$ （個）です。

計算結果が28となる5けたの整数

$0 + 0 + 0 + 4 \times 7 = 28$ となる $(0, 0, 0, 4, 7)$ の並びかえ…8個

$0 + 0 + 1 + 3 \times 9 = 28$ となる $(0, 0, 1, 3, 9)$ の並びかえ… $3 \times 4 \times 3 = 36$ (個)

$1 + 1 + 1 + 5 \times 5 = 28$ となる $(1, 1, 1, 5, 5)$ の並びかえ… $5 \times 4 \div (2 \times 1) = 10$ (個)

$0 + 0 + 2 \times 2 \times 7 = 28$ となる $(0, 0, 2, 2, 7)$ の並びかえ… $12 + 6 = 18$ (個)

$0 + 1 + 3 \times 3 \times 3 = 28$ となる $(0, 1, 3, 3, 3)$ の並びかえ… $4 + 12 = 16$ (個)

よって、 $8 + 36 + 10 + 18 + 16 = 88$ (個) です。

計算結果が496となる4けた・5けたの整数

素因数分解をすると $496 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 31$ なので、1けたの整数の積が496になることはありません。よって、たし算を含む式を考えます。

4けたの場合は $a + b \times c \times d = 0 + 496 = 1 + 495$ の $0 + 496$ は明らかに成立せず、素因数分解をすると $495 = 3 \times 3 \times 5 \times 11$ となって素因数11が含まれるので、3けたの整数が495になることはありません。また、 $a \times b + c \times d$ の場合は、 $a \times b$ か $c \times d$ の少なくとも一方が 0×0 の場合しか最大値になりません。 0×1 の場合は $0 + 1$ の方が大きくなります。よって、明らかに成立しません。

5けたの場合の $a + b \times c \times d \times e$ 、および、 $a \times b + c \times d \times e$ の場合も同様に成立しません。

計算結果が8128以上の完全数となる4けた・5けたの整数

素因数分解をすると $8128 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 127$ なので、1けたの整数の積が8128になることはありません。よって、たし算を含む式を考えます。

そして、たし算を含む式の最大値は、 $9 + 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 6570$ より小さい(99999 の場合は $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 59049$ になるので)ので、8128にはなりません。

また、 $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 59049$ より、33550336以上の完全数になることもありません。

以上より、 $7 + 25 + 32 + 80 + 37 + 88 = 269$ (個) です。