

最難関問題

3番目に大きい約数

1と素数以外の整数 N について、 N の3番目に大きい約数を、 $[N]$ と表します。例えば、 $[4] = 1$ 、 $[30] = 10$ 、 $[[30]] = 2$ です。次の問いに答えなさい。

(1) $[N] = 143$ のとき、 N として考えられる整数をすべて求めなさい。

$[]$ の個数を、右下に小さい文字をつけて表します。たとえば、 $[30]$ は $[30]_1$ 、 $[[30]]$ は $[30]_2$ です。

(2) $[N]_2 = 143$ のとき、 N として考えられる整数は何個ありますか。

(3) $[N]_3 = 143$ のとき、 N として考えられる整数は何個ありますか。

(4) $[N]_{10} = 143$ のとき、 N として考えられる整数は何個ありますか。

最難関問題

3番目に大きい約数 (1) 572, 1287, 1859 (2) 8個 (3) 17個 (4) 276個

(1) 12の約数をすべて求める場合、積が12になる組を調べ上げます。

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 6 & 4 \end{array}$$

同じことを $[N] = 143$ である N について行くと、次のようになります。

$$\begin{array}{ccc} N & \cdots & 1 \quad v \quad y \quad \cdots \\ & & N \quad w \quad 143 \quad \cdots \end{array}$$

v は 1 の次に小さい約数ですから、素数でなければなりません。 v がもしも 6 のような素数ではない数だとすると、その約数である 2 や 3 も N の約数になってしまうからです。では、 $v = 2$ としてみましよう。

$$\begin{array}{ccc} N & \cdots & 1 \quad 2 \quad y \quad \cdots \\ & & N \quad w \quad 143 \quad \cdots \end{array}$$

N は 2 の倍数になりますから、 $N = y \times 143$ も 2 の倍数でなければなりません。よって、 y は 2 の倍数です。さらに、 y が N の 3 番目に小さい約数であるためには、 y は $2 \times 2 = 4$ でなければなりません。このとき、 N の約数は次のようになります。

$$\begin{array}{ccc} N & \cdots & 1 \quad 2 \quad 4 \quad \cdots \\ & & 572 \quad 286 \quad 143 \quad \cdots \end{array}$$

このことからわかるのは、 v が 143 の約数ではないような素数の場合、 $y = v \times v$ であり、かつ、 $v \times v$ は 143 の 2 番目に小さい約数である 11 より小さいということです。条件を満たすのは、上に見た $v = 2$ の場合に加えて、 $v = 3$ の場合です。

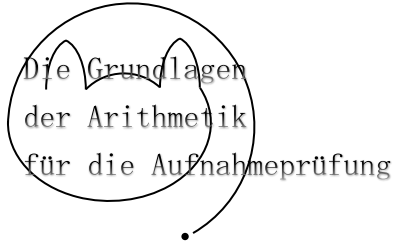
$$\begin{array}{ccc} N & \cdots & 1 \quad 3 \quad 9 \quad \cdots \\ & & 1287 \quad 429 \quad 143 \quad \cdots \end{array}$$

v が 143 の約数ではない場合は以上で全てです。

次に v が 143 の約数の場合を考えます。この場合、 v は 143 の 2 番目に小さい約数である 11 となります。

$$\begin{array}{ccc} N & \cdots & 1 \quad 11 \quad y \quad \cdots \\ & & N \quad w \quad 143 \quad \cdots \end{array}$$

このとき、 y として考えられる数は $11 \times 11 = 121$ か、11 より大きい素数です。これらの数のうちで最も小さいのは、 143 の約数である 13 です。

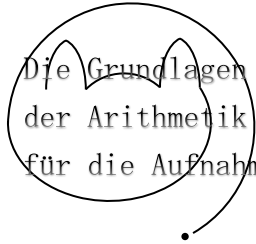


最難関問題

$N \cdots 1 \quad 11 \quad 13 \quad \cdots$

$1859 \quad 169 \quad 143 \quad \cdots$

よって、 $[N] = 143$ のとき、 N として考えられる数は 572 、 1287 、 1859 の 3 個です。



最難関問題

(2) (1) より, $[N]_2 = 143$ のとき, $[N] = 572, 1287, 1859$ です。それぞれの場合を考えてみましょう。

○ $[N] = 572 = 2 \times 2 \times 11 \times 13$ のとき

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & v & y & \cdots \\ & N & w & 572 \cdots \end{array}$$

2 は 572 の約数ですから $v = 2$ ときまります。このとき, y にあてはまる数は 572 の 3 番目に小さい約数である 4 か, 4 より小さい素数である 3 です。それぞれ, 次のようになります。

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 2 & 3 & \cdots \\ & N & w & 572 \cdots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 2 & 4 & \cdots \\ & N & w & 572 \cdots \end{array}$$

よって, N として考えられる整数は, 572×3 と 572×4 の 2 個です。

○ $[N] = 1287 = 3 \times 3 \times 11 \times 13$ のとき

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & v & y & \cdots \\ & N & w & 1287 \cdots \end{array}$$

このとき, v は 2 か 3 ですが, v を 2 とすると $y = v \times v = 4$ とすることができません。1287 の約数である 3 のほうが 4 より小さいからです。よって, v は 3 ときまります。3 は 1287 の約数です。

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 3 & y & \cdots \\ & N & w & 1287 \cdots \end{array}$$

1287 の 3 番目に小さい約数は 9 ですから, y は 9 か, 9 より小さい素数である 5, 7 です。

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 3 & 5 & \cdots \\ & N & w & 1287 \cdots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 3 & 7 & \cdots \\ & N & w & 1287 \cdots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 3 & 9 & \cdots \\ & N & w & 1287 \cdots \end{array}$$

よって, N として考えられる整数は, $1287 \times 5, 1287 \times 7, 1287 \times 9$ の 3 個です。

○ $[N] = 1859 = 11 \times 13 \times 13$ のとき

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & v & y & \cdots \\ & N & w & 1859 \cdots \end{array}$$

この場合は, (1) と同じように考えられるので, $1859 \times 4, 1859 \times 9, 1859 \times 13$ の 3 個です。

$$\begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 2 & 4 & \cdots \\ & N & w & 1859 \cdots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 3 & 9 & \cdots \\ & N & w & 1859 \cdots \end{array} \quad \begin{array}{cccc} N \cdots 1 & 11 & 13 & \cdots \\ & N & w & 1859 \cdots \end{array}$$

以上より, $2 + 3 + 3 = 8$ (個) です

最難関問題

(3) (2) で求めた 8 個の数について、1 を除いた約数のうち小さいほうから < 1 つ目, 2 つ目 > に注目をしてみます。

○ < 1 1, 1 3 > ... 1 8 5 9 × 1 3 → 3 個

1 4 3 や 1 4 3 × 1 3 = 1 8 5 9 も < 1 1, 1 3 > です。これらは、4, 9, 1 3 倍することで、3 個に増えます。4 倍された数は < 2, 4 > に、9 倍された数は < 3, 9 > に、1 3 倍された数は < 1 1, 1 3 > になります。

○ < 2, 3 > ... 5 7 2 × 3 → 1 個

これがどのように増えるかは、(2) まででは考えていないので、ここで調べてみます。

$N \cdots 1 \quad v \quad y \quad \cdots$

$N \quad w \quad x \quad \cdots$

x の約数が小さい順に 1, 2, 3, ... ですから、 $v = 2$, $y = 3$ です。3 倍されて、< 2, 3 > になります。

○ < 2, 4 > ... 5 7 2 × 4, 1 8 5 9 × 4 → 2 個 × 2 = 4 個

5 7 2 も < 2, 4 > です。3, 4 倍することで、2 個に増えます。3 倍された数は < 2, 3 > に、4 倍された数は < 2, 4 > になります。

○ < 3, 5 > ... 1 2 8 7 × 5 → 1 個

これがどのように増えるかも、(2) まででは考えていないので、ここで調べてみます。

$N \cdots 1 \quad v \quad y \quad \cdots$

$N \quad w \quad x \quad \cdots$

x の約数は小さい順に 1, 3, 5, ... です。 $v = 2$, $y = 4$ とすることはできないので、 $v = 3$ です。このとき、 y は 5 です。よって、5 倍されて、< 3, 5 > になります。

○ < 3, 7 > ... 1 2 8 7 × 7 → 2 個

これがどのように増えるかも、(2) まででは考えていないので、ここで調べてみます。

$N \cdots 1 \quad v \quad y \quad \cdots$

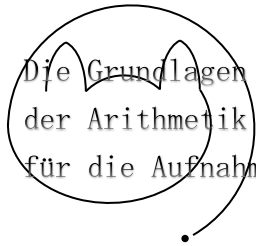
$N \quad w \quad x \quad \cdots$

x の約数は小さい順に 1, 3, 7, ... です。 $v = 2$, $y = 4$ とすることはできないので、 $v = 3$ です。このとき、 y は 5 か 7 です。5, 7 倍されて、< 3, 5 > か < 3, 7 > になります。

○ < 3, 9 > ... 1 2 8 7 × 9, 1 8 5 9 × 9 → 3 個 × 2 = 6 個

1 2 8 7 も < 3, 9 > です。5, 7, 9 倍することで、3 個に増えます。5 倍された数は < 3, 5 > に、7 倍された数は < 3, 7 > に、9 倍された数は < 3, 9 > になります。

以上より、 $3 + 1 + 4 + 1 + 2 + 6 = 17$ (個) になります。



最難関問題

(4) (3) より, $[\]$ の操作を行うことで最終的に 1 4 3 になる数がどのようにつくられていくのかをまとめ上げると, 次のようになります。

| $\langle 1 \text{ つ目}, 2 \text{ つ目} \rangle$ | 増える前 (個) | 増えた後 (個) |
|--|----------|-------------|
| $\langle 1 \ 1, 1 \ 3 \rangle$ | a | a |
| $\langle 2, 3 \rangle$ | b | $b + c$ |
| $\langle 2, 4 \rangle$ | c | $a + c$ |
| $\langle 3, 5 \rangle$ | d | $d + e + f$ |
| $\langle 3, 7 \rangle$ | e | $e + f$ |
| $\langle 3, 9 \rangle$ | f | $a + f$ |

これにしたがって順に調べていくと, 次の表ができあがります。

| $[\] \ n \text{ の } n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------------------|---|---|---|----|----|----|----|-----|-----|-----|-----|
| 合計 | 1 | 3 | 8 | 17 | 31 | 51 | 78 | 113 | 157 | 211 | 276 |
| $\langle 1 \ 1, 1 \ 3 \rangle$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $\langle 2, 3 \rangle$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |
| $\langle 2, 4 \rangle$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\langle 3, 5 \rangle$ | 0 | 0 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 | 84 | 120 | 165 |
| $\langle 3, 7 \rangle$ | 0 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 | 28 | 36 | 45 |
| $\langle 3, 9 \rangle$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |

$\langle 1 \ 1, 1 \ 3 \rangle$ は常に 1 個, $\langle 2, 4 \rangle$ と $\langle 3, 9 \rangle$ は 0 から始まる差が 1 の等差数列, $\langle 2, 3 \rangle$ と $\langle 3, 7 \rangle$ は三角数, $\langle 3, 5 \rangle$ は $4 = 1 + 3$, $10 = 1 + 3 + 6$ のように, 三角数の和になっています。結果として, 合計の個数は 2, 5, 9, 14, ... と階差数列で増えていき, この増え方の差は 3, 4, 5, ... と等差数列になっています。