最難関問題

３番目に大きい約数

１と素数以外の整数Ｎについて，Ｎの３番目に大きい約数を，［Ｎ］と表します。例えば，［４］＝１，［３０］＝１０，[[３０]]＝２です。次の問いに答えなさい。

（１）［Ｎ］＝１４３のとき，Ｎとして考えられる整数をすべて求めなさい。

[]の個数を，右下に小さい文字をつけて表します。たとえば，［３０］は［３０］$_{1}$，[[３０]]は［３０］$_{2}$です。

（２）［Ｎ］$_{2}$＝１４３のとき，Ｎとして考えられる整数は何個ありますか。

（３）［Ｎ］$_{3}$＝１４３のとき，Ｎとして考えられる整数は何個ありますか。

（４）［Ｎ］$_{10}$＝１４３のとき，Ｎとして考えられる整数は何個ありますか。

最難関問題

３番目に大きい約数（1）５７２，１２８７，１８５９　（２）８個　（３）１７個　（４）２７６個

（１）１２の約数をすべて求める場合，積が１２になる組を調べ上げます。

１２…1　2　3
　　12　6　4

同じことを［Ｎ］＝１４３であるＮについて行うと，次のようになります。

N…1　v　y　…
　N　w　143　…

ｖは１の次に小さい約数ですから，素数でなければなりません。ｖがもしも６のような素数ではない数だとすると，その約数である２や３もＮの約数になってしまうからです。では，ｖ＝２としてみましょう。

N…1　2　y　…
　N　w　143　…

Ｎは２の倍数になりますから，Ｎ＝ｙ×１４３も２の倍数でなければなりません。よって，ｙは２の倍数です。さらに，ｙがＮの３番目に小さい約数であるためには，ｙは２×２＝４でなければなりません。このとき，Ｎの約数は次のようになります。

N…1　2　4　…
　572　286　143　…

このことからわかるのは，ｖが１４３の約数ではないような素数の場合，ｙ＝ｖ×ｖであり，かつ，ｖ×ｖは１４３の２番目に小さい約数である１１より小さいということです。条件を満たすのは，上に見たｖ＝２の場合に加えて，ｖ＝３の場合です。

N…1　3　9　…
　1287　429　143　…

ｖが１４３の約数ではない場合は以上で全てです。

次にｖが１４３の約数の場合を考えます。この場合，ｖは１４３の２番目に小さい約数である１１となります。

N…1　11　y　…
　N　w　143　…

このとき，ｙとして考えられる数は１１×１１＝１２１か，１１より大きい素数です。これらの数のうちで最も小さいのは，１４３の約数である１３です。

最難関問題

N…1　11　13　…

　1859　169　143　…

よって，［N］＝１４３のとき，Nとして考えられる数は５７２，１２８７，１８５９の３個です。

最難関問題

（２）（１）より，［Ｎ］$_2$＝１４３のとき，［Ｎ］＝５７２，１２８７，１８５９です。それぞれの場合を考えてみましょう。

○［Ｎ］＝５７２＝２×２×１１×１３のとき

N…1　v　y　…
N　w　572　…

２は５７２の約数ですからｖ＝２ときまります。このとき，ｙにあてはまる数は５７２の３番目に小さい約数である４か，４より小さい素数である３です。それぞれ，次のようになります。

N…1　2　3　…　　　N…1　2　4　…
N　w　572　…　　　N　w　572　…

よって，Ｎとして考えられる整数は，５７２×３と５７２×４の２個です。

○［Ｎ］＝１２８７＝３×３×１１×１３のとき

N…1　v　y　…
N　w　1287　…

このとき，ｖは２か３ですが，ｖを２とするとｙ＝ｖ×ｖ＝４とすることができません。１２８７の約数である３のほうが４より小さいからです。よって，ｖは３ときまります。３は１２８７の約数です。

N…1　3　y　…
N　w　1287　…

１２８７の３番目に小さい約数は９ですから，ｙは９か，９より小さい素数である５，７です。

N…1　3　5　…　　　N…1　3　7　…　　　N…1　3　9　…
N　w　1287　…　　　N　w　1287　…　　　N　w　1287　…

よって，Ｎとして考えられる整数は，１２８７×５，１２８７×７，１２８７×９の３個です。

○［Ｎ］＝１８５９＝１１×１３×１３のとき

N…1　v　y　…
N　w　1859　…

この場合は，（１）と同じように考えられるので，１８５９×４，１８５９×９，１８５９×１３の３個です。

N…1　2　4　…　　　N…1　3　9　…　　　N…1　11　13　…
N　w　1859　…　　　N　w　1859　…　　　N　w　1859　…

以上より，２＋３＋３＝８（個）です

最難関問題

（３）（２）で求めた８個の数について，１を除いた約数のうち小さいほうから＜１つ目，２つ目＞に注目をしてみます。

○＜１１，１３＞…１８５９×１３→３個

１４３や１４３×１３＝１８５９も＜１１，１３＞です。これらは，４，９，１３倍することで，３個に増えます。４倍された数は＜２，４＞に，９倍された数は＜３，９＞に，１３倍された数は＜１１，１３＞になります。

○＜２，３＞…５７２×３→１個

これがどのように増えるかは，（２）まででは考えていないので，ここで調べてみます。

Ｎ…１　ｖ　ｙ　　…

　　Ｎ　ｗ　ｘ　…

ｘの約数が小さい順に１，２，３，…ですから，ｖ＝２，ｙ＝３です。３倍されて，＜２，３＞になります。

○＜２，４＞…５７２×４，１８５９×４→２個×２＝４個

５７２も＜２，４＞です。３，４倍することで，２個に増えます。３倍された数は＜２，３＞に，４倍された数は＜２，４＞になります。

○＜３，５＞…１２８７×５→１個

これがどのように増えるかも，（２）まででは考えていないので，ここで調べてみます。

Ｎ…１　ｖ　ｙ　　…

　　Ｎ　ｗ　ｘ　…

ｘの約数は小さい順に１，３，５，…です。ｖ＝２，ｙ＝４とすることはできないので，ｖ＝３です。このとき，ｙは５です。よって，５倍されて，＜３，５＞になります。

○＜３，７＞…１２８７×７→２個

これがどのように増えるかも，（２）まででは考えていないので，ここで調べてみます。

Ｎ…１　ｖ　ｙ　　…

　　Ｎ　ｗ　ｘ　…

ｘの約数は小さい順に１，３，７，…です。ｖ＝２，ｙ＝４とすることはできないので，ｖ＝３です。このとき，ｙは５か７です。５，７倍されて，＜３，５＞か＜３，７＞になります。

○＜３，９＞…１２８７×９，１８５９×９→３個×２＝６個

１２８７も＜３，９＞です。５，７，９倍することで，３個に増えます。５倍された数は＜３，５＞に，７倍された数は＜３，７＞に，９倍された数は＜３，９＞になります。

以上より，３＋１＋４＋１＋２＋６＝１７（個）になります。

最難関問題

（４）（３）より，[] の操作を行うことで最終的に１４３になる数がどのようにつくられていくのかをまとめ上げると，次のようになります。

＜１つ目，２つ目＞	増える前（個）	増えた後（個）
＜１１，１３＞	a	a
＜２，３＞	b	b ＋ c
＜２，４＞	c	a ＋ c
＜３，５＞	d	d ＋ e ＋ f
＜３，７＞	e	e ＋ f
＜３，９＞	f	a ＋ f

これにしたがって順に調べていくと，次の表ができあがります。

[] ｎのｎ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
合計	1	3	8	17	31	51	78	113	157	211	276
＜１１，１３＞	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
＜２，３＞	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
＜２，４＞	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
＜３，５＞	0	0	1	4	10	20	35	56	84	120	165
＜３，７＞	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45
＜３，９＞	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

＜１１，１３＞は常に１個，＜２，４＞と＜３，９＞は０から始まる差が１の等差数列，＜２，３＞と＜３，７＞は三角数，＜３，５＞は４＝１＋３，１０＝１＋３＋６のように，三角数の和になっています。結果として，合計の個数は２，５，９，１４，…と階差数列で増えていき，この増え方の差は３，４，５，…と等差数列になっています。