最難関問題

輪と正三角形

図１のように，１辺の長さが３㎝の正三角形の頂点の位置に杭を打ち，３本の杭の外側に半径が３㎝の円の形をした輪を置きます。杭の大きさや輪の太さは考えません。円周率は３.１４とします。

図１

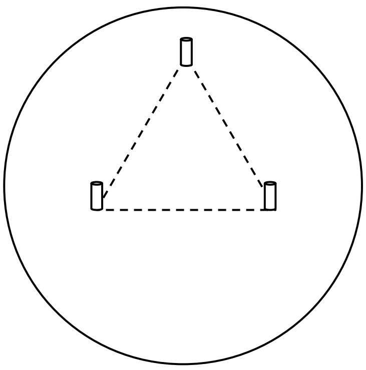


図２

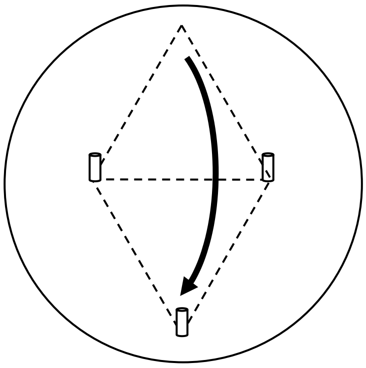
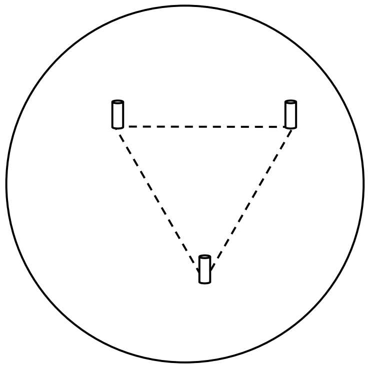


図３



（１）図１において輪を動かすとき，輪が通過できる部分の面積を求めなさい。

次に，図２のように１本の杭を外して，残り２本の杭を結ぶ直線を軸にして線対称の位置に打ちなおします。このとき，輪は杭の外側に置いておきます。そして，図３のように輪を動かします。

（２）図１の状態における輪と，図３の状態における輪のうち，一方のみが通過できる部分の面積の和を求めなさい。

最難関問題

輪と正三角形　（１）５６.５２cm^2　（２）２８.２６cm^2

（１）輪が２本の杭に接するのは，図４のア，イ，ウの位置です。アの位置からイの位置に輪がすべることなく動くとき，図５の点Ｐに注目をすると，太線で示したおうぎ形の弧を描きます。よって，輪が通過することのできる部分は，図６で影をつけたＡの部分と，斜線で示したＢの部分です。

　Ａの部分１個とＢの部分１個を組み合わせると半径が６cmで中心角が６０度のおうぎ形になるので，輪が通過できる部分の面積は，$6\times6\times3.14\times\frac{1}{6}\times3=56.52$（$\text{cm}^2$）です。

図４

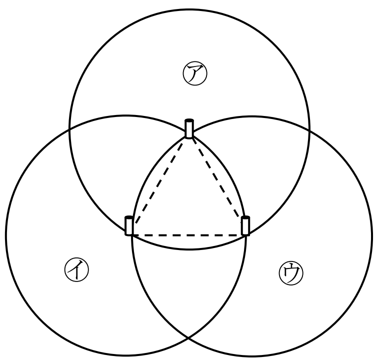


図５

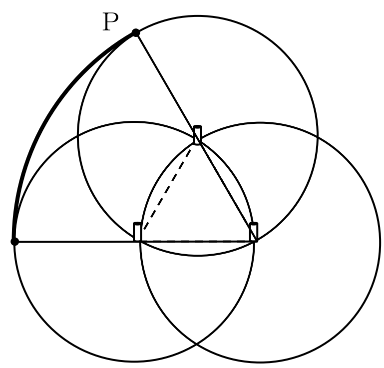
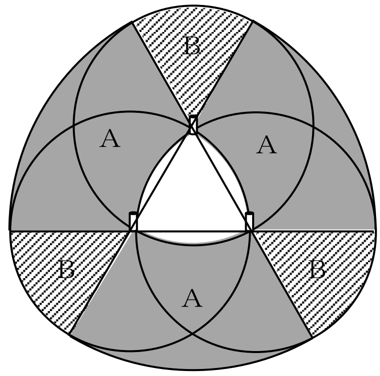


図６



最難関問題

（２）杭を打ちなおした後で輪が通過できる部分は，図７のようになります。図６と図７をあわせて，一方のみが通過できる部分に影をつけると，図８のようになります。

図７

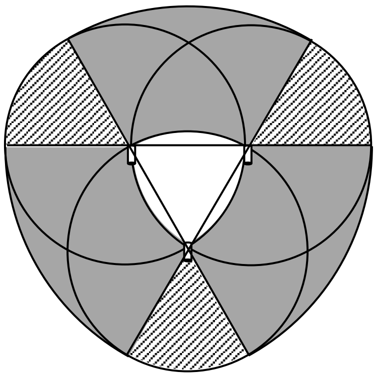


図８

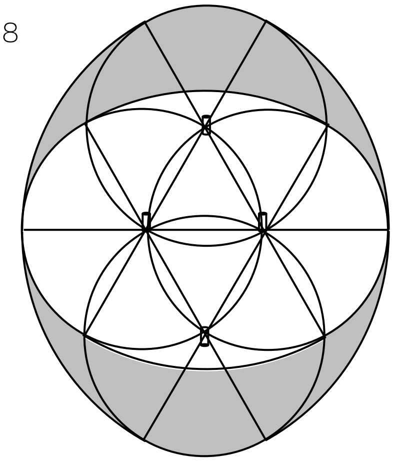


図８は上下に対称な図形ですから，上半分のみを考えます。図８の上半分の面積は，図９の影と斜線をつけた部分の面積から，図１０の影と斜線をつけた部分の面積を引くことで求められます。図９の影と斜線をつけた部分はＡ２個とＢ１個を組み合わせたものです。また，図１０の斜線をつけた部分はＢ２個です。図１０の影をつけた部分は，図１１においてＡ１個から斜線部分を引くことで求められます。図１１の斜線部分は，図１２のようにＢ１個と面積が等しいので，図１０の影をつけた部分の面積は，Ａ×１－Ｂ×１です。

図９

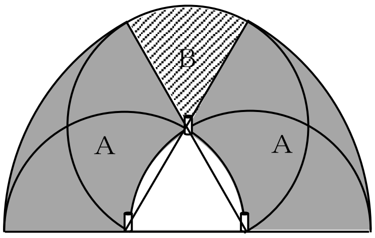


図１０

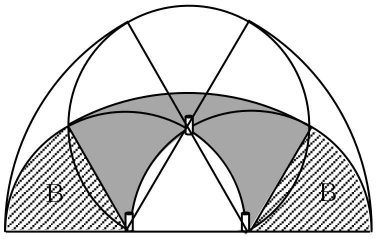


図１１

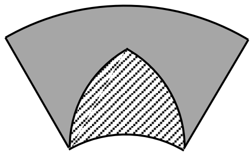
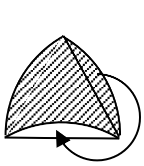


図１２



以上をまとめると，次のようになります。
図９の影と斜線をつけた部分の面積…Ａ×２＋Ｂ×１
図１０の影と斜線をつけた部分の面積…Ｂ×２＋（Ａ×１－Ｂ×１）＝Ａ×１＋Ｂ×１
よって，差はＡ１個分となりますから，一方の輪のみが通過できる部分の面積はＡ２個分なので，

（６×６－３×３）×３.１４×$\frac{1}{6}$×２＝２８.２６（㎝^{2}）です。