

最難関問題

フィボナッチ数列の問題・3

数を次の手順で左から並べることで、数列Aを作ります。仮分数はすべて帯分数にします。

- ① まず、 $411\frac{1}{3}$ と $1440\frac{1}{3}$ を並べます。 $411\frac{1}{3}$, $1440\frac{1}{3}$
- ② みぎはし右端の2つの数の和を次の数とします。 $411\frac{1}{3}$, $1440\frac{1}{3}$, $1851\frac{2}{3}$
- ③ 右端の2つの数の差を次の数とします。 $411\frac{1}{3}$, $1440\frac{1}{3}$, $1851\frac{2}{3}$, $411\frac{1}{3}$
- ④ 以降は、手順②、③をくり返します。

$$411\frac{1}{3}, 1440\frac{1}{3}, 1851\frac{2}{3}, 411\frac{1}{3}, 2263, 1851\frac{2}{3}, \dots$$

(1) 2263 は1番目の整数で、数列Aの5番目に現れます。33番目の整数は数列Aの何番目に現れますか。

(2) 数列Aから帯分数の分数部分を消して、数列Bをつくります。

$$411, 1440, 1851, 411, 2263, 1851, \dots$$

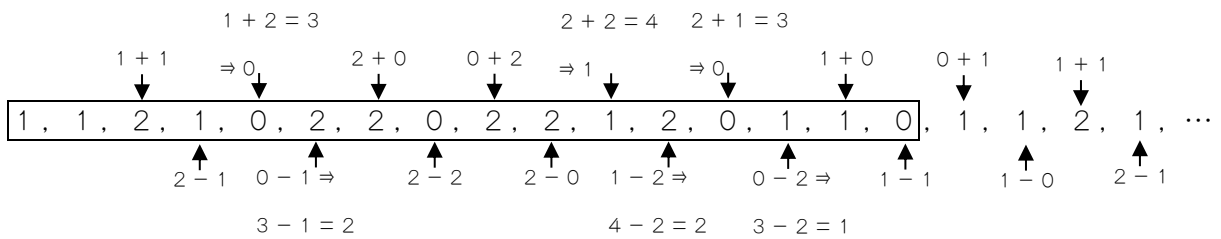
3番目の数 1851 は1番目と2番目の数の和、4番目の数 411 は2番目と3番目の数の差になっていますが、5番目の数 2263 と6番目の数 1851 は前の2つの数の和にも差にもなっていません。前の2つの数の和でも差でもない33番目の数は、数列Bの何番目に現れますか。



最難関問題

フィボナッチ数列の問題・3 (1) 133番目 (2) 891番目

(1) 整数について問われているので、分数部分のみに注目します。分母3の分子は、
 1, 1, 1 + 1 = 2, 2 - 1 = 1, 2 + 1 = 3より分数はなくなるので0, というように変化していきます。続けると、以下のように16個の数の周期になります。



0のところでは数列Aに整数が現れるので、16個の数のうち4個が0であることから、 $33 \div 4 = 8$ 余り1より、 $16 \times 8 + 5 = 133$ (番目) です。

(2) なぜ2263は前の2つの数の和にならないのでしょうか。 $1851\frac{2}{3} + 411\frac{1}{3} = 2263$ にお

いて、 $\frac{2}{3}$ と $\frac{1}{3}$ の和が1であるため、分数部分の和が整数に「くり上がる」からです。1851が前の

2つの数の差にならないのは、 $2263 - 411\frac{1}{3} = 1851\frac{2}{3}$ において2263から1「くり下が

って」 $2262\frac{3}{3} - 411\frac{1}{3} = 1851\frac{2}{3}$ と引き算をするからです。

(1) の16個の数の周期において和を求める際に⇒が使われている箇所はくり上がり、差を求める際に⇒が使われている箇所はくり下がりになります。

			和	差	和	差	和	差	和	差	和	差	和	差	和	差	和	差	...
分子	1	1	2	1	0	2	2	0	2	2	1	2	0	1	1	0	1	1	...
くり上がり					○						○		○						...
くり下がり						○						○		○					...

16個の数の周期のうち6か所でくり上がりかくり下がりが起きています。 $333 \div 6 = 55$ 余り3より、 $16 \times 55 + 11 = 891$ (番目) です。