

最難関問題

2番目に大きい約数・1

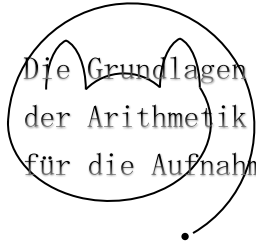
2以上の整数 N について、 $(N \times 2) + (N$ の2番目に大きい約数)を、 $[N]$ と表します。例えば、 $[7] = 7 \times 2 + 1 = 15$ 、 $[12] = 12 \times 2 + 6 = 30$ です。次の問いに答えなさい。

(1) 、にあてはまる数を答えなさい。

$$[8] = \text{あ} \quad [[2]] = \text{い}$$

(2) = 70のとき、にあてはまる整数を答えなさい。

(3) = 105のとき、にあてはまる整数を答えなさい。



最難関問題

2番目に大きい約数・1 (1) $\boxed{\text{あ}} = 20$, $\boxed{\text{い}} = 23$ (2) $\boxed{\text{う}} = 28$
 (3) $\boxed{\text{え}} = 9$

(1) $[8] = 8 \times 2 + 4 = 20$
 $[[[2]]] = [[5]] = [11] = 23$

(2) $\boxed{\text{う}} \times 2 \frac{1}{N} = \boxed{\text{う}} \times \frac{2 \times N + 1}{N} = 70$ ですから、 $2 \times N + 1$ は 70 の約数でなければなりません。また、 N は 2 以上の整数ですから、 $2 \times N + 1$ は 5 以上の大きい奇数です。よって、考えられるのは 5, 7, 35 です。このとき、 N は 2, 3, 17 となります。

$70 \div 2 \frac{1}{2} = 28$, $70 \div 2 \frac{1}{3} = 30$, $70 \div 2 \frac{1}{17} = 34$ より、28, 30, 34 が答えとなりそうです。しかし、 $[28] = 28 \times 2 + 14 = 70$ となる一方で、 $[30] = 30 \times 2 + 15 = 75$, $[34] = 34 \times 2 + 17 = 85$ ですから、 $\boxed{\text{う}}$ にあてはまる数は 28 のみとなります。

なぜ、28 のみ条件を満たし、30 と 34 はダメなのでしょう。 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{17}$ という分数の部分に注目をしましょう。28 が条件を満たすのは、 $28 \times \frac{1}{2} = 14$ が実際に 28 の 2 番目に大きい約数だからで、そうなるのは $\frac{1}{2}$ の分母 2 が 28 の 2 番目に小さい約数だからです。3, 17 はそれぞれ 30 と 34 の 2 番目に小さい約数ではありません。よって、28 のみが条件を満たすのです。

(3) $[[[\boxed{\text{え}}]]] = 105$ のとき、 $\boxed{\text{え}}$ にあてはまる整数をすべて答えなさい。105 の 5 以上の大きい奇数の約数は (もっとも 105 の約数はすべて奇数ですが)、5, 7, 15, 21, 35, 105 です。

$$105 \div 2 \frac{1}{2} = 42 \dots \bigcirc, \quad 105 \div 2 \frac{1}{3} = 45 \dots \bigcirc, \quad 105 \div 2 \frac{1}{7} = 49 \dots \bigcirc,$$

$$105 \div 2 \frac{1}{10} = 50 \dots \times, \quad 105 \div 2 \frac{1}{17} = 51 \dots \times, \quad 105 \div 2 \frac{1}{52} = 52 \dots \times$$

よって、 $[[[\boxed{\text{え}}]]] = 42, 45, 49$ です。

最難関問題

ここから場合分けを行います。

$$42 : 42 \div 2\frac{1}{3} = 18 \cdots \times, \quad 42 \div 2\frac{1}{10} = 20 \cdots \times$$

$$45 : 45 \div 2\frac{1}{2} = 18 \cdots \circ, \quad 45 \div 2\frac{1}{4} = 20 \cdots \times, \quad 45 \div 2\frac{1}{7} = 21 \cdots \times,$$

$$45 \div 2\frac{1}{22} = 22 \cdots \times$$

$$49 : 49 \div 2\frac{1}{3} = 21 \cdots \circ, \quad 49 \div 2\frac{1}{24} = 24 \cdots \times$$

よって、[] = 18, 21です。

$$18 : 18 \div 2\frac{1}{4} = 8 \cdots \times$$

$$21 : 21 \div 2\frac{1}{3} = 9 \cdots \circ, \quad 21 \div 2\frac{1}{10} = 10 \cdots \times$$

以上より、9のみが答えとなります。