

最難関問題

平均点以上未満

点数が0以上100以下の整数でつくテストがあります。何人かの生徒が受けたところ、全員が異なる点数をとりました。以下の ～ にあてはまる数を答えなさい。

(1) 20人の生徒がテストを受けて、平均点が20点になりました。このとき、平均点以上の点数をとった生徒は、最も多くて 人、もっと少なくても 人です。

(2) 30人の生徒がテストを受けました。このとき、平均点以上の点数をとった生徒は、最も多くて 人、もっと少なくても 人です。



最難関問題

平均点以上未満 (1) = 14, = 3 (2) = 25, = 5

(1)

平均点以上の生徒の得点が20点, 21点, 22点, …と平均点に近く, 平均点未満の生徒の得点が0点, 1点, 2点, …と平均点から遠い場合を考えます。平均点以上の生徒たちの, 平均点との点差は次のようになりますが,

得点	20	21	22	…
点差	0	1	2	…

その合計が, 平均点未満の生徒たちの平均点との点差

得点	0	1	2	…
点差	20	19	18	…

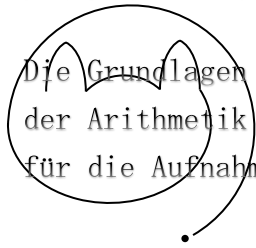
の合計と等しくなる場合を求めます。

仮に全員が平均点以上だとすると, $0 + 1 + 2 + \dots + 19 = 190$ (点) が点差の合計です。ここからずらして考えていきます。平均点以上の人数が19人の場合, $0 + 1 + 2 + \dots + 18 = 171$ (点) が点差の合計で, これを平均点未満の1人がとることはできないので, 不成立です。平均点以上の人数が18人の場合, $0 + 1 + 2 + \dots + 17 = 153$ (点) が点差の合計で, これを平均点未満の2人がとることができるのは, $153 = 77 + 76$ より, 平均点が77点で2人の得点が0点と1点, といった場合ですから, 平均点が20点の場合には不成立です。

平均点以上の人数	20	19	18	17	16	15	14	…
点差の合計	190	171	153	136	120	105	91	…
平均点未満の人数	0	1	2	3	4	5	6	…

同様に探していくと, 平均点以上の人数が14人の場合, $0 + 1 + 2 + \dots + 13 = 91$ (点) の点差を平均点未満の6人がとればよいので, 91を $18 + 17 + 16 + 15 + 14 + 11$ のように和分解をすれば, 6人の得点が2点, 3点, 4点, 5点, 6点, 9点となって成立します。

よって, = 14です。



最難関問題

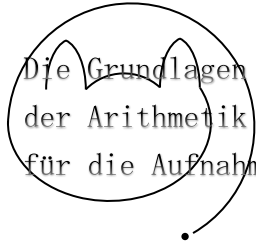
最も少ない場合

平均点以上の生徒の得点が100点, 99点, 98点, …と平均点から遠く, 平均点未満の生徒の得点が19点, 18点, 17点, …と平均点から近い場合を考えます。

仮に全員が平均点未満だとすると, $1 + 2 + \dots + 20 = 210$ (点) が点差の合計です。ここからずらして考えていきます。平均点未満の人数が19人の場合, $1 + 2 + \dots + 19 = 190$ (点) が点差の合計で, これを平均点以上の1人がとることはできないので, 不成立です。

平均点未満の人数	20	19	18	17	16	15	14	…
点差の合計	210	190	171	153	136	120	105	…
平均点以上の人数	0	1	2	3	4	5	6	…

平均点未満の人数が18人の場合, $1 + 2 + \dots + 18 = 171$ (点) が点差の合計で, これを平均点未満の2人がとることができるのは, $171 = 86 + 85$ より, 2人の得点が $20 + 86 = 106$ (点) と105点の場合なので, 不成立です。平均点未満の人数が17人の場合, $1 + 2 + \dots + 17 = 153$ (点) が点差の合計で, これを平均点未満の3人がとることができるのは, $153 = 52 + 51 + 50$ より, 3人の得点が $20 + 52 = 72$ (点), 71点, 70点の場合です。よって, = 3です。



最難関問題

(2) 平均点自体が何点なのか定まっていますが、□点とおくことで、(1)と同様に考えていくことができます。

最も多い場合

平均点以上の生徒の得点が□点、(□+1)点、(□+2)点、…と平均点に近く、平均点未満の生徒の得点が0点、1点、2点、…と平均点から遠い場合を考えます。平均点以上の生徒たちの、平均点との点差は次のようになりますが、

得点	□	□+1	□+2	…
点差	0	1	2	…

その合計が、平均点未満の生徒たちの平均点との点差

得点	0	1	2	…
点差	□	□-1	□-2	…

の合計と等しくなる場合を求めます。

仮に全員が平均点以上だとすると、 $0 + 1 + 2 + \dots + 29 = 435$ (点) が点差の合計です。ここからずらして考えていきます。平均点以上の人数が29人の場合、 $0 + 1 + 2 + \dots + 28 = 406$ (点) が点差の合計で、これを平均点未満の1人がとることはできないので、不成立です。

平均点以上の人数	30	29	28	27	26	25	…
点差の合計	435	406	378	351	325	300	…
平均点未満の人数	0	1	2	3	4	5	…

同様に探していくと、平均点以上の人数が26人の場合、 $0 + 1 + 2 + \dots + 25 = 325$ (点) の点差を平均点未満の4人がとればよいので、325を $83 + 82 + 81 + 79$ などで和分解をします。しかしこの場合、平均点は最低でも83点でなければならず、平均点以上の人数は $100 - 83 + 1 = 18$ (人) 以下となるので、矛盾します。

平均点以上の人数が25人の場合、 $0 + 1 + 2 + \dots + 24 = 300$ (点) の点差を平均点未満の5人がとればよいので、300を $62 + 61 + 60 + 59 + 58$ で和分解をします。この場合、平均点は最も低くて62点ですから、平均点以上の人数が25人いても問題はありませぬ。よって、ウ = 25です。



最難関問題

最も少ない場合

平均点以上の生徒の得点が100点, 99点, 98点, …と平均点から遠く, 平均点未満の生徒の得点が $(\square - 1)$ 点, $(\square - 2)$ 点, $(\square - 3)$ 点, …と平均点から近い場合を考えます。

仮に全員が平均点未満だとすると, $1 + 2 + \dots + 30 = 465$ (点) が点差の合計です。ここからずらして考えていきます。平均点未満の人数が29人の場合, $1 + 2 + \dots + 29 = 435$ (点) が点差の合計で, これを平均点以上の1人がとることはできないので, 不成立です。

平均点未満の人数	30	29	28	27	26	25	...
点差の合計	465	435	406	378	351	325	...
平均点以上の人数	0	1	2	3	4	5	...

同様に探していくと, 平均点未満の人数が26人の場合, $0 + 1 + 2 + \dots + 26 = 351$ (点) の点差を平均点未満の4人がとればよいので, 351を $90 + 88 + 87 + 86$ などで和分解をします。しかしこの場合, 平均点は最高でも $100 - 90 = 10$ (点) でなければならず, 平均点未満の人数が26点であるという条件と矛盾します。

平均点未満の人数が25人の場合, $0 + 1 + 2 + \dots + 25 = 325$ (点) の点差を平均点未満の5人がとればよいので, 325を $67 + 66 + 65 + 64 + 63$ で和分解をします。この場合, 平均点は最も高くて33点ですから, 平均点未満の人数が25人いても問題はありませぬ。よって, エ = 5です。