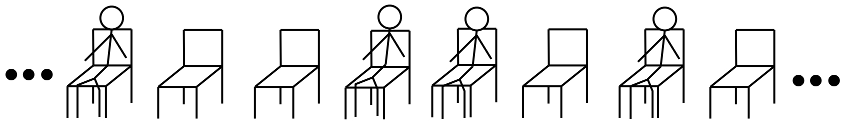
受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

気を遣った座り方・２

椅子が横一列に何脚か並んでいます。椅子に座る際は，両隣りに人が座っているような人がでないようにします。



太郎君は，椅子が４脚並んでいる場合に最も多くて３人座ることができて，人が座っている椅子の組み合わせが２通りあることを，次の表のよって確かめました。表では，○は人が座っている椅子，×は空席を表しています。

○	○	×	○
○	×	○	○

（１）椅子が２８脚並んでいます。

① 最も多くて何人が椅子に座ることができますか。また，そのときに人が座っている椅子の組み合わせは何通り考えられますか。

② ２人が椅子に座りました。その様子を見ていた太郎君は，「①で求めた人数が椅子に座ることはできない」と言いました。２人が座っている椅子の組み合わせは何通り考えられますか。

（２）椅子が３０脚並んでいます。

① 最も多くて何人が椅子に座ることができますか。また，そのときに人が座っている椅子の組み合わせは何通り考えられますか。

② ２人が椅子に座りました。その様子を見ていた太郎君は，「①で求めた人数が椅子に座ることはできない」と言いました。２人が座っている椅子の組み合わせは何通り考えられますか。

（３）椅子が何脚か並んでいます。太郎君は，「２人が座った段階で，最も多い人数が座ることが不可能になるような２脚の椅子の組み合わせは３７８通りある」と言いました。椅子は何脚並んでいますか。考えられるものをすべて答えなさい。

最難関問題

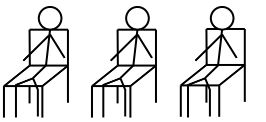
気を遣った座り方・２

（１）①１９人，１０通り　②４５通り　（２）①２０人，２１通り　②４５通り
（３）３８脚，８２脚，８４脚

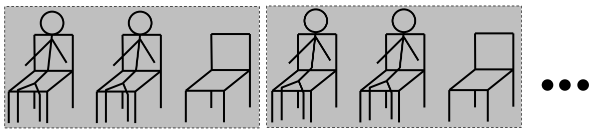
（１）

①　図①のように３人が連続して座ると，中央の人にとっては両隣りに人が座っていることになります。よって，３人以上連続して座らないようにします。そのため，図②のように左端の席から順に２人座って１席空けることをくり返すと，２８÷３＝９余り１より，２×９＋１＝１９（人）座ることができます。

図①

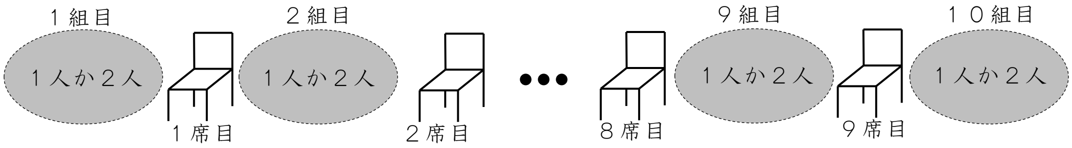


図②



１９人座ると，空席は２８－１９＝９（席）となります。よって，図③のように１９人が２人組の９組と１人に分かれて，その間に空席を置いていけばよいことになります。以上より，１０組のうちで１人の組となる１組を選べばよいので，１０通りです。

図③



最難関問題

②　表で①の１０通りをまとめると，以下のようになります。空欄になっている所は，上のマスと同じ記号が入ります。

席	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
A	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○
B	○	○	×	○	×																							
C				○	○	×	○	×																				
D							○	○	×	○	×																	
E										○	○	×	○	×														
F													○	○	×	○	×											
G																○	○	×	○	×								
H																			○	○	×	○	×					
I																						○	○	×	○	×		
J																									○	○	×	○

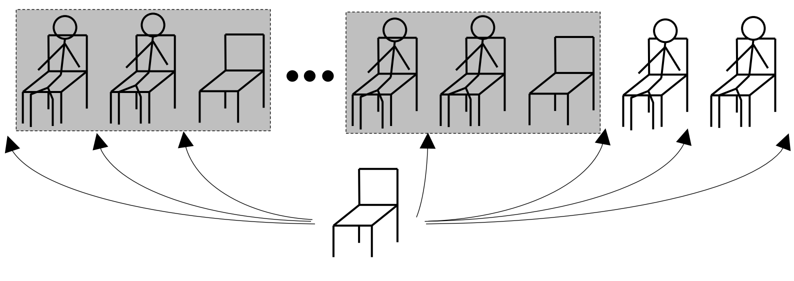
２人が座った席が，Ａ～Ｊのいずれかのパターンにおいてどちらも○になっていれば，１９人の着席が可能です。よって，Ａ～Ｊのいずれのパターンにおいても，少なくとも一方は×となっているような２つの席の組み合わせを探します。

表において×がついているのは，３の倍数の席と３の倍数＋２の席です。２つの席がどちらも３の倍数の席の場合，Ａのパターンでどちらも○になります。また，２つの席がどちらも３の倍数＋２の席の場合，Ｊのパターンでどちらも○になります。ここで３の席に注目をすると，２，５，８，…，２６と，９席の３の倍数＋２の席との組み合わせについて，どちらも○になることはありません。６の席に注目をすると，５，８，…，２６と，８席の３の倍数＋２の席との組み合わせについて，どちらも○になることはありません。以降も同様となり，最後に２７の席に注目をすると，２６の席との組み合わせについて，どちらも○になることはありません。以上より，９＋８＋…＋１＝４５より，４５通りです。

（２）

①　椅子が２９脚並んでいるとすると，図④のように，２９÷３＝９余り２より，２人座って１席空けることを９回くり返して，右端の２席に２人が座るので，２×１０＝２０（人）座ることができます。この状態で椅子をもう１脚追加しても，座ることができる人数は増えません。また，追加する１脚の椅子は人が座っている椅子の間に入れる場合に１０通り，両端に入れる場合に２通り，空席の隣に入れる場合は右隣りでも左隣でも変わらないので９通りの入れ方があるので，１０＋２＋９＝２１（通り）です。

図④



最難関問題

②　表で①の２１通りをまとめると，以下のようになります。空欄になっている所は，上のマスと同じ記号が入ります。

席	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
A	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○
B	○	×	○																											
C	○	○	×																											
D				○	×	○																								
E				○	○	×																								
F							○	×	○																					
G							○	○	×																					
H										○	×	○																		
I										○	○	×																		
J													○	×	○															
K													○	○	×															
L																○	×	○												
M																○	○	×												
N																			○	×	○									
O																			○	○	×									
P																						○	×	○						
Q																						○	○	×						
R																									○	×	○			
S																									○	○	×			
T																												○	×	○
U																												○	○	×

　２人が座った席が，Ａ～Ｕのいずれかのパターンにおいてどちらも○になっていれば，２０人の着席が可能です。よって，Ａ～Ｊのいずれのパターンにおいても，少なくとも一方は×となっているような２つの席の組み合わせを探します。

　３の席に注目をすると，４，７，１０，…，２８と，９席の３の倍数＋１の席との組み合わせについて，どちらも○になることはありません。６の席に注目をすると，７，１０，…，２８と，８席の３の倍数＋１の席との組み合わせについて，どちらも○になることはありません。以降も同様となり，最後に２７の席に注目をすると，２８の席との組み合わせについて，どちらも○になることはありません。以上より，９＋８＋…＋１＝４５より，４５通りです。

（３）（１）では椅子の数が３の倍数＋１の場合,（２）では３の倍数の場合を考えました。どちらの場合も，下のような表が続くことになるので，３の椅子から順に３の倍数の椅子に注目をすると，ともに○となることがない椅子の数は１つずつ減っていくので，組み合わせは連続する整数の和，つまりは三角数になります。

席	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	○	×	○	○	×	○	○	×	○	○	×	○
B	○	○	×									
C				○	○	×						
D							○	○	×			
E										○	○	×

席	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A	×	○	○	×	○	○	×	○	○
B	○	×	○						
C	○	○	×						
D				○	×	○			
E				○	○	×			
F							○	×	○
G							○	○	×

最難関問題

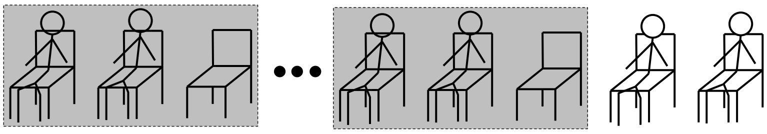
（１＋□）×□÷２＝３７８の場合，（１＋□）×□＝７５６です。７５６は２０×２０＝４００と３０×３０＝９００の間の数ですから，十の位が２で積の一の位が６となる２つの連続する整数を考えて，２７×２８を計算すると７５６になります。よって，□＝２７で，７５６は２７番目の三角数です。

椅子の数が３の倍数＋１の場合，３の椅子に対して２，５，８，…と２７席がともに○とならず，３×２７＝８１より左から８１番目の椅子は８０番目の椅子とともに○になることがありません。このとき，椅子は８１＋１＝８２（脚）です。

椅子の数が３の倍数の場合，３の椅子に対して４，７，１０，…と２７席がともに○とならず，３×２７＝８１より左から８１番目の椅子は８２番目の椅子とともに○になることがありません。このとき，椅子は８２＋２＝８４（脚）です。

最後に，椅子の数が３の倍数＋２の場合を考えます。このとき，最大の人数が座る方法は図⑤の１通りしかありません。

図⑤



よって，２人のうち少なくとも１人が，図⑤において空席となるべき椅子に座る場合を考えます。例えば椅子が２９脚の場合，２人が座る椅子の組み合わせは全部で$\frac{29\times28}{2\times1}$＝４０６（通り），２人とも空席となるべき椅子に座らない場合が，$\frac{20\times19}{2\times1}$＝１９０（通り）なので，４０６－１９０＝２１６（通り）になります。ここから３２脚，３５脚，と順に探していくと，３８脚のときに$\frac{38\times37}{2\times1}-\frac{26\times25}{2\times1}$＝３７８（通り）となって条件を満たします。

以上より，３８脚，８２脚，８４脚です。