最難関問題

誠実数

５けたの整数４４１４４には，４が４個，１が１個現れています。このように，各位の数がその数の分だけ現れている数を，「誠実数」とよぶことにします。

誠実数を小さい順に並べると，１，２２，１２２，２１２，２２１，３３３，…となります。以下の問いに答えなさい。

（１）小さいほうから１００番目の誠実数を答えなさい。

（２）最大の誠実数と，３番目に大きい誠実数の差を答えなさい。

（３）最大の誠実数と，４００番目に大きい誠実数の差を答えなさい。

最難関問題

誠実数　（１）４４２４４２　（２）９９　（３）３０１０８８７

（１）１けたの誠実数は１，２けたの誠実数は２２です。

３けたの誠実数

３けたの整数において数は３個現れるので，３を和分解します。

３＝３より，３が３個現れる整数３３３

３＝２＋１より２が２回，１が１回現れる整数１２２，２１２，２２１

３＝１＋１＋１から考えられる整数１１１は誠実数ではないので，和分解において同じ整数は１度しか現れてはいけません。また，０は０回現れる，つまりは現れないので，誠実数に０は現れません。

このように，３けたの誠実数は例にある１２２，２１２，２２１，３３３の４個です。

４けたの誠実数

４＝４より，４４４４の１通り

４＝３＋１より，３３３１を並びかえて４通り

となって４けたの誠実数は４＋１＝５（個）あります。

５けたの誠実数

５＝５より，５５５５５の１通り

５＝４＋１より，４４４４１を並びかえて５通り

５＝３＋２より，３３３２２を並びかえて，$\frac{5\times4}{2\times1}$＝１０（通り）

となって５けたの誠実数は１＋５＋１０＝１６（個）あります。

６けたの誠実数

６＝６より，６６６６６６の１通り

６＝５＋１より，５５５５５１を並びかえて６通り

６＝４＋２より，４４４４２２を並びかえて，$\frac{6\times5}{2\times1}$＝１５（通り）

６＝３＋２＋１より，３３３２２１を並びかえて，$\frac{6}{1}\times\frac{5\times4}{2\times1}$＝６０（通り）

となって６けたの誠実数は１＋６＋１５＋６０＝８２（個）あります。

最難関問題

よって，６けたの誠実数の，大きいほうから，１＋１＋４＋５＋１６＋８２－９９＝１０（番目）が，求める数です。６けたの誠実数を大きい順に並べると，

６６６６６６…１通り

５$\boxed{\text{５５５５１}}$…$\boxed{\text{５５５５１}}$の部分を並びかえて５通り

４４４４２２，４４４２４２，４４４２２４，４４２４４２，となるので，４４２４４２です。

（２）誠実数は無限にあるわけではありません。最大の誠実数は，

$$\underbrace{9\cdots9}_{9個}\ \underbrace{8\cdots8}_{8個}\ \underbrace{7\cdots7}_{7個}\ \underbrace{6\cdots6}_{6個}\ \underbrace{5\cdots5}_{5個}\ 4444333221$$

です。ここから，下の位の数から順に入れかえていきます。２番目に大きい誠実数は，…３３３２１２，３番目に大きい誠実数は，…３３３１２２ですから，最大の誠実数と３番目に大きい誠実数の差は，２２１－１２２＝９９です。

（３）下の位の数を入れかえることで，何通りの誠実数ができるかを考えていきます。

…４４４４３３３$\boxed{\text{２２１}}$の$\boxed{\text{２２１}}$を入れかえると３通り，

…４４４４３３$\boxed{\text{３２２１}}$の$\boxed{\text{３２２１}}$を入れかえると４×３＝１２（通り），

…４４４４３$\boxed{\text{３３２２１}}$の$\boxed{\text{３３２２１}}$を入れかえると５×$\frac{4\times3}{2\times1}$＝３０（通り），

…４４４４$\boxed{\text{３３３２２１}}$の$\boxed{\text{３３３２２１}}$を入れかえると６×$\frac{5\times4}{2\times1}$＝６０（通り），

…４４４$\boxed{\text{４３３３２２１}}$の$\boxed{\text{４３３３２２１}}$を入れかえると７×６×$\frac{5\times4}{2\times1}$＝４２０（通り），

よって，$\boxed{\text{４３３３２２１}}$の入れかえを考えます。入れかえてできる誠実数のうち，小さいほうから４２０－３９９＝２１（番目）のものを求めればよいので，

１２２$\boxed{\text{３３３４}}$…$\boxed{\text{３３３４}}$を並びかえて４通り，

１２３$\boxed{\text{２３３４}}$…$\boxed{\text{２３３４}}$を並びかえて，４×３＝１２（通り）

１２４$\boxed{\text{２３３３}}$…$\boxed{\text{２３３３}}$を並びかえて４通り，

ここまでで４×２＋１２＝２０（通り）ですから，その次の数は１３２２３３４です。

以上より，最大の誠実数と４００番目に大きい誠実数の差は，

４３３３２２１－１３２２３３４＝３０１０８８７です。