受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

数表と剰余

　図１のように整数を並べた表があります。図１の表の整数を１から順に３で割っていき，その余りを図２のように書いていきます。図２は２３を３で割った余りまで書いた状態を表しています。必要であれば２枚目の方眼を使って，以下の問いに答えなさい。

図１

1	2	5	10	17	26
4	3	6	11	18	27
9	8	7	12	19	28
16	15	14	13	20	29
25	24	23	22	21	30
36	35	34	33	32	31

図２

1	2	2	1	2	
1	0	0	2	0	
0	2	1	0	1	
1	0	2	1	2	
		2	1	0	

（１）１００を３で割った余りまでを書いたとき，表の中に９つの数が図３のように並んでいるところは何か所ありますか。

図３

1	2	2
1	0	0
0	2	1

（２）３２４を３で割った余りまでを書いたとき，表の中に２つの数が図４のように並んでいるところは何か所ありますか。

図４

1
1

（３）表の中に３つの数が図５のように並んでいるところが３２５か所になるのは，どの整数を３で割った余りまで書いたときですか。

図５

2
0

最難関問題

最難関問題

数表と剰余　（１）３か所　（２）２１か所　（３）１４０７

（１）１００を３で割ったところまでを書くと，図①の影をつけた３か所が図３のようになります。

図①

1	2	2	1	2	2	1	2	2	1
1	0	0	2	0	0	2	0	0	2
0	2	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	2	1	2	2	1	2	2	1
1	0	2	1	0	0	2	0	0	2
0	2	1	0	2	1	0	1	1	0
1	0	2	1	0	2	1	2	2	1
1	0	2	1	0	2	1	0	0	2
0	2	1	0	2	1	0	2	1	0
1	0	2	1	0	2	1	0	2	1

（２）図１の表は，図②のように整数を１個，３個，５個，７個，…と並べています。奇数の列１，３，５，７，…を３で割ったときの余りは１，０，２，１，…となって１，０，２のくり返しとなります。また，奇数の列を左から順に加えていった数は１，４，９，１６，…と平方数になって，表１の一番左の列に並びます。このような周期性があるため，それを３で割った余りは図③のように１，１，０，１，…と１，１，０のくり返しになり，表の一番上の行は１，２，２，１，…と１，２，２のくり返しになります。

図②

1	2	5	10	17	26	37	50	65
4	3	6	11	18	27	38	51	66
9	8	7	12	19	28	39	52	67
16	15	14	13	20	29	40	53	68
25	24	23	22	21	30	41	54	69
36	35	34	33	32	31	42	55	70
49	48	47	46	45	44	43	56	71
64	63	62	61	60	59	58	57	72
81	80	79	78	77	76	75	74	73

図③

1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	0	0	2	0	0	2	0	0
0	2	1	0	1	1	0	1	1
1	0	2	1	2	2	1	2	2
1	0	2	1	0	0	2	0	0
0	2	1	0	2	1	0	1	1
1	0	2	1	0	2	1	2	2
1	0	2	1	0	2	1	0	0
0	2	1	0	2	1	0	2	1

最難関問題

ここで図④のように正方形の対角線にあたる線を引いて考えると，一番左の列の$\boxed{1，1，0}$のくり返しと一番上の$\boxed{1，2，2}$のくり返しから，それぞれ右と下に向けて，対角線とぶつかるまでは数が１つずつずれていきます。このことから，マス目をたて横３マスからなる９マスの正方形に区切って考えると，図⑤のようになります。そこでは，対角線上はＡ，それより右上ではＢ，左下ではＣの正方形が並んでいます。

図④

1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	0	0	2	0	0	2	0	0
0	2	1	0	1	1	0	1	1
1	0	2	1	2	2	1	2	2
1	0	2	1	0	0	2	0	0
0	2	1	0	2	1	0	1	1
1	0	2	1	0	2	1	2	2
1	0	2	1	0	2	1	0	0
0	2	1	0	2	1	0	2	1

図⑤

1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	0	0	2	0	0	2	0	0
0	2	1	0	1	1	0	1	1
1	0	2	1	2	2	1	2	2
1	0	2	1	0	0	2	0	0
0	2	1	0	2	1	0	1	1
1	0	2	1	0	2	1	2	2
1	0	2	1	0	2	1	0	0
0	2	1	0	2	1	0	2	1

A

1	2	2
1	0	0
0	2	1

B

1	2	2
2	0	0
0	1	1

C

1	0	2
1	0	2
0	2	1

$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 1\\\hline\end{array}$の数の並びは，ＡとＣの中に１か所ずつ現れます。３２４＝１８×１８＝（３×３）×６×６より，９マスの正方形がたて横６マスにならぶので，図⑥のようになります。ＡとＣの正方形は

１＋２＋３＋４＋５＋６＝２１（個）あるので，$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 1\\\hline\end{array}$ の数の並びも２１か所あります。

図⑥

A	B	B	B	B	B
C	A	B	B	B	B
C	C	A	B	B	B
C	C	C	A	B	B
C	C	C	C	A	B
C	C	C	C	C	A

最難関問題

（３）$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 0\\\hline\end{array}$ の数の並びは，図⑦のようにＡの中に２か所，Ｂの中に３か所あります。また，Ｃの正方形と１つ上の正方形との境界に１か所あります。よって，図⑦において何か所あるかは，図⑧のようにとらえることができます。９マスの正方形がちょうどたて横に等しい個数並ぶ場合，ＢとＣの正方形の個数は等しくなるので，平均するとＡ，Ｂ，Ｃすべての正方形に２か所あることになり，図⑧の場合は平方数３×３＝９の２倍で，１８か所となります。

図⑦

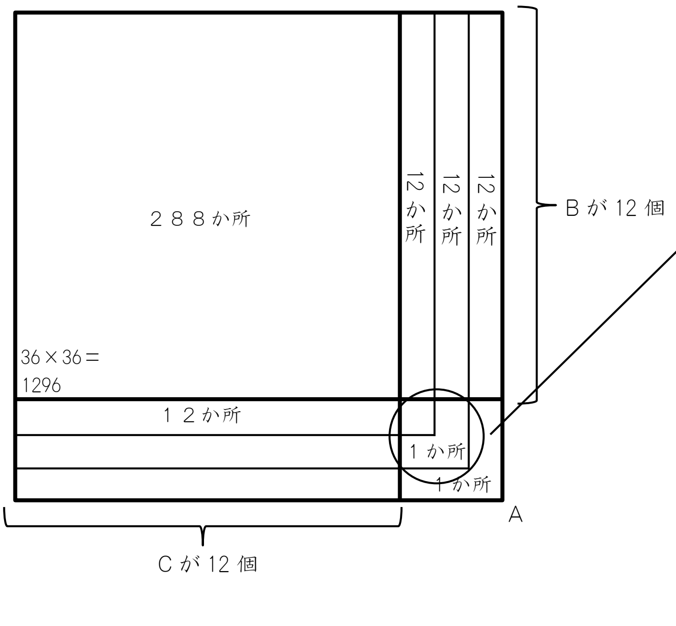
1	2	2	1	2	2	1	2	2
1	0	0	2	0	0	2	0	0
0	2	1	0	1	1	0	1	1
1	0	2	1	2	2	1	2	2
1	0	2	1	0	0	2	0	0
0	2	1	0	2	1	0	1	1
1	0	2	1	0	2	1	2	2
1	0	2	1	0	2	1	0	0
0	2	1	0	2	1	0	2	1

図⑧

A 2	B 3	B 3
C 1	A 2	B 3
C 1	C 1	A 2

平方数を２倍した数のうちで，３２５より小さいなかで最大のものは１２×１２×２＝２８８ですから，９マスの正方形がたて横に１２個並んで，$\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 0\\\hline\end{array}$ の並びが２８８か所になったところから考えます。図⑨のように，このときの最後の数は，３×１２＝３６より，３６×３６＝１２９６です。この後，図⑨のように $\begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 0\\\hline\end{array}$ の並びは現れるので，３２５－２８８＝３７，３７＝１２×３＋１より，図⑩の０まで余りを書いたところで３２５か所になります。よって，１２９６＋３６×３＋１＋２＝１４０７です。

図⑨



図⑩

1	2
1	0