受験算数の基礎

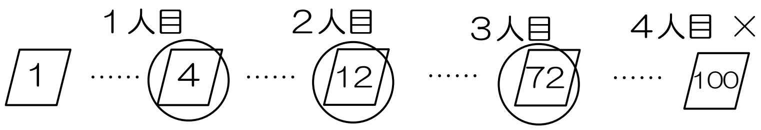
Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

カード取り

１から順に整数が書かれたカードが１枚ずつあります。まず，１人目がカードを１枚取ります。２人目は１人目がとったカードの倍数が書かれたカードを１枚取り，３人目は２人目がとったカードの倍数が書かれたカードを１枚取り，…というように，前の人がとったカードの倍数が書かれたカードをとることができなくなるまで続けます。

例えば，カードが１００まであって，１人目が４，２人目が１２，３人目が７２のカードをとったとき，４人目はとることができるカードがありません。



（１）カードが１００まであって，６人目までカードをとることができました。このとき，４人目がとったカードに書かれた整数として考えられるものをすべて答えなさい。

（２）カードが ア までであって， イ 人目までカードをとることができました。このとき，６人目がとったカードに書かれた整数として考えられるものは７通りです。

ア ， イ にあてはまる整数の組みを答えなさい。ただし， ア にあてはまる整数はできるだけ小さい１９の倍数とします。

最難関問題

カード取り　（１）８，１２，１６，１８，２０，２４　（２）$\boxed{\text{ア}}$…４３７，$\boxed{\text{イ}}$…８

（１）６人目までカードをとることができたので，５人目がとったカードは最大で１００÷２＝５０，４人目がとったカードは最大で５０÷２＝２５です。

また，このような範囲を気にしないで考えると，１人目はあらゆるカードをとることができ，２人目は１人目が1のカードをとった場合を考えると１×○のカードをとることができるので，2以上のあらゆるカードをとることができます。３人目は１×○×□のカードをとることができるので，素因数分解をしたときに素数が２個以上現れる数，つまりは素数以外の数のカードをとることができます。よって，４人目は素因数分解をしたときに素数が３個以上現れる数のカードをとることができます。

以上の条件から，４人目がとったカードに書かれた整数として考えられるものは，８，１２，１６，１８，２０，２４です。

（２）（１）に続けて考えると，５人目は素因数分解をしたときに素数が４個以上現れる数のカードを，６人目は素因数分解をしたときに素数が５個以上現れる数のカードをとることができます。これらの数を小さい順に並べるために，素因数分解をしたときに現れる２の個数に注目して場合分けをします。

○２が５個以上…３２の倍数なので，３２，６４，９６，１２８，…
○２が４個…１６×（３以上の奇数）なので，４８，８０，１１２，１４４，…
○２が３個…８に２以外の素数を２個以上かけた積なので，８×９＝７２，８×１５＝１２０，…
○２が２個…４に２以外の素数を３個以上かけた積なので，４×２７＝１０８，４×４５＝１８０，…
○２が１個…２に２以外の素数を４個以上かけた積なので，２×８１＝１６８，…
○２が０個…２以外の素数を５個以上かけた積なので，２４３，…

以上から小さい順に７個を並べると，３２，４８，６４，７２，８０，９６，１０８となります。小さいほうから８番目の数は１１２なので，６人目は１０８をとることはできて１１２をとることはできない，ということになります。このことを踏まえて，人数とカードの枚数を考えます。

６人目までしかカードをとることができない場合，最後のカードは１０８以上１１２未満です。この範囲に，１９の倍数にあたる数はありません。７人目までカードをとることができる場合，最後のカードは，１０８×２＝２１６以上，１１２×２＝２２４未満です。この範囲にも１９の倍数にあたる数はありません。

８人目までカードをとることができる場合，最後のカードは，２１６×２＝４３２以上，２２４×２＝４４８未満です。この範囲には，１９×２３＝４３７があります。よって，$\boxed{\text{ア}}$…４３７，$\boxed{\text{イ}}$…８となります。