受験算数の基礎

Die Grundlagen
der Arithmetik
für die Aufnahmeprüfung

最難関問題

真分数である既約分数の個数・２

　分子が分母より小さい整数である分数を真分数といいます。分母が６の分数のうち，真分数である既約分数は，$\frac{1}{6}$と$\frac{5}{6}$の２個あります。

（１）

①　分母が３０の真分数である既約分数は何個ありますか。

②　分母が１５０の真分数である既約分数は何個ありますか。

③　分母が３３０の真分数である既約分数は何個ありますか。

（２）次の$\boxed{\quad}$にあてはまる数をすべて答えなさい。ないときは，「ない」と答えなさい。

①　分母が$\boxed{\quad}$の真分数である既約分数は１２個あります。

②　分母が$\boxed{\quad}$の真分数である既約分数は１３個あります。

③　分母が$\boxed{\quad}$の真分数である既約分数は１４個あります。

（３）どのような整数Ａについても，分母がＡの真分数である既約分数の個数が$\boxed{\quad}$個ということはありません。$\boxed{\quad}$にあてはまる１以上５０以下の整数は何個ありますか。

最難関問題

真分数である既約分数の個数・２

（１）①　８個　②　４０個　③　８０個

（２）①　１３，２１，２８，３６，４２　②　ない　③　ない　（３）３０個

（１）

①　素因数分解をすると３０＝２×３×５ですから，分子は２，３，５の倍数ではない３０未満の整数です。具体的には，１，７，１１，１３，１７，１９，２３，２９の８個があります。よって，分母が３０の真分数である既約分数は８個あります。

②　素因数分解をすると１５０＝２×３×５×５ですから，①の３０と比べると，素因数は２，３，５のまま変わりません。よって，②で考えた８個の整数の周期的な並びが５回くり返されるだけです。

１，７，１１，１３，１７，１９，２３，２９

＋３０

３１，３７，４１，４３，４７，４９，５３，５９

＋３０

…

そのため，８×５＝４０（個）です。

③　素因数分解をすると３３０＝２×３×５×１１です。ここで，新たに素因数に加わった１１のことをいったん忘れると，既約分数の分子の候補は，８個の整数の周期的な並びが１１回くり返されるので，８×１１＝８８（個）です。

ここから，１１の倍数を除きます。３３０＝１１×３０ですから，１１×１〜１１×３０という１１の倍数のうち，１１×□の□に入る部分の数が２，３，５の倍数でない数が，上で考えた分子の候補に含まれています。□にあてはまる数は，実は①で既に求めている８個の整数に他なりません。

よって，８８−８＝８０（個）です。

最難関問題

（２）（１）をどう活かすのかを考えます。（１）の②では，分母が３０の真分数である既約分数が８個であるのに対し，３０の素因数でもある素数５をかけてきでる１５０が分母の，真分数である既約分数は，８×５＝４０（個）ありました。

それに対して，（１）の③では，８×１１＝８８（個）の候補のうち，８個が１１の倍数なので，８×（１１－１）＝８０（個）となりました。以上から，次のことが成り立ちます。

整数Ａが分母となっている真分数である既約分数がＮ個あるとき， 素数ＭがＡの素因数であるのなら，分母がＡ×Ｍの真分数である既約分数の個数はＮ×Ｍ個， 素数ＭがＡの素因数でないのなら，分母がＡ×Ｍの真分数である既約分数の個数はＮ×（Ｍ－１）個

整数Ａ自身も素数の積ですから，以下では分母を素因数分解した形で考えます。素数２の個数に注目をして場合分けると，次のようになります。

①

○２×２×２×（他の素数をいくつか）の場合

分母が２だと真分数である既約分数は１個なので，分母が２×２×２だと１×２×２＝４（個）です。３をかけて分母を２×２×２×３とすると，４×（３－１）＝８（個）となり，８は１２の約数ではないのでここから先はうまくいきません。また，５をかけて分母を２×２×２×５とすると，４×（５－１）＝１６（個）となり，大きくなりすぎてしまいます。

このように，真分数である既約分数が１２個となる分母は得られません。

○２×２×（他の素数をいくつか）の場合

分母が２だと真分数である既約分数は１個なので，分母が２×２だと１×２＝２（個）です。３をかけて分母を２×２×３とすると，２×（３－１）＝４（個）となるので，分母を２×２×３×３とすると，４×３＝１２（個）となります。よって，分母が２×２×３×３＝３６の場合に条件を満たします。

５をかけて分母を２×２×５とすると，２×（５－１）＝８（個）となってうまくいきません。

７をかけて分母を２×２×７とすると，２×（７－１）＝１２（個）となります。よって，分母が２×２×７＝２８の場合も条件を満たします。

最難関問題

○２×（他の素数をいくつか）の場合

分母が２だと真分数である既約分数は１個なので，分母が２×３だと１×（３－１）＝２（個）です。ここで３をかけて分母を２×３×３とすると，２×３＝６（個）となります。さらに３以上の素数をかけても，この６個を２倍することはできません。

５をかけて分母を２×３×５としても，２×（５－１）＝８（個）となってうまくいきません。

７をかけて分母を２×３×７とすると，２×（７－１）＝１２（個）となります。よって，分母が２×３×７＝４２の場合も条件を満たします。

次に，分母が２×５だと１×（５－１）＝４（個）となりますが，さらに５以上の素数をかけても，この４個を３倍することはできません。分母が２×７の場合は，１×（７－１）＝６（個）となりますが，さらに７以上の素数をかけても，この６個を２倍することはできません。

○２以外の素数の積の場合

分母が３だと真分数である既約分数は２個なので，分母が３×７だと２×（７－１）＝１２（個）となります。よって，分母が３×７＝２１の場合に条件を満たします。

分母が５，７，１１だと真分数である既約分数は４個，６個，１０個となり，うまくいきません。

分母が１３だと真分数である既約分数は１２個なので，条件を満たします。

以上より，１３，２１，２８，３６，４２です。

②　１３は素数ですから，ここまで見てきた方法のよって真分数である既約分数が１３個となるためには，１４が素数であって，１４－１＝１３（個）とするしかありません。もちろん，１４は素数ではありませんから，このようなことは成り立ちません。よって，真分数である既約分数が１３個となる場合はありません。

③　まず，１５は素数ではないので，分母が１５の真分数である既約分数が１５－１＝１４（個）にはなりません。かけ算によって１４になるためには，１４＝２×７であることから，７に注目をします。８は素数ではないので，８－１＝７にはなりません。よって，かけ算において７が現れるためには，分母を素因数分解したときに７が２個以上現れて，（７－１）×７×…となるしかありません。しかしこのとき，真分数である既約分数の個数は（７－１）×７＝４２（個）以上になってしまいます。よって，真分数である既約分数が１４個となる場合はありません。

最難関問題

（３）改めて，次の仕組みを考えます。

整数Ａが分母となっている真分数である既約分数がＮ個あるとき， 素数ＭがＡの素因数であるのなら，分母がＡ×Ｍの真分数である既約分数の個数はＮ×Ｍ個， 素数ＭがＡの素因数でないのなら，分母がＡ×Ｍの真分数である既約分数の個数はＮ×（Ｍ－１）個

整数Ａは真分数の分母ですから２以上となるので，素数か素数の積です。このことから，Ａ＝２で真分数である既約分数が$\frac{1}{2}$の１個である場合を除くと，真分数である既約分数が奇数個であることはあり得ない，ということを導くことができます。

整数Ａを素因数分解したときに２が２個以上現れる場合，真分数である既約分数の個数は，（２－１）×２×…となって偶数になります。また，２以外の素数はすべて奇数ですから，素因数分解したときに２以外の素数□を含む場合は，真分数である既約分数の個数は，…×（□－１）×…となって偶数になります。よって，真分数である既約分数の個数が３以上４９以下の２４個の奇数のいずれかになることはあり得ません。

次に，偶数個の場合について考えます。まず，素数－１の偶数については，たとえば分母３の真分数である既約分数が$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$の２個あるように，可能です。この条件を満たすのは，２，４，６，１０，１２，１６，１８，２２，２８，３０，３６，４０，４２，４６です。残りの偶数については，それぞれ考えていきます。

８…分母が２×２×２×２のときに，（２－１）×２×２×２＝８（個）となるので可能です。

１４…（２）③の通り，不可能です。

２０…分母が５×５のときに，（５－１）×５＝２０（個）となるので可能です。

２４…分母が２×２×２×３×３のときに，（２－１）×２×２×（３－１）×３＝２４（個）となるので可能です。

２６…２６＝２×１３ですが，かけ算において１３が現れるためには，分母を素因数分解したときに１３が２個以上現れて，（１３－１）×１３×…となるしかありません。しかしこのとき，真分数である既約分数の個数は（１３－１）×１３＝１５６（個）以上になってしまいます。よって，真分数である既約分数が２６個となる場合はありません。

最難関問題

３２…分母が２×２×２×２×２×２のときに，（２－１）×２×２×２×２×２＝３２（個）となるので可能です。

３４…３４＝２×１７なので，２６のときと同じように，不可能です。

３８…３８＝２×１９なので，２６のときと同じように，不可能です。

４４…４４＝２×２×１１なので，２６のときと同じように，不可能です。

４８…分母が２×２×２×２×３×３のときに，（２－１）×２×２×２×（３－１）×３＝４８（個）となるので可能です。

５０…５０＝２×５×５です。かけ算において５が２個以上現れるためには，素因数分解をしたときに５が３個以上現れて，（５－１）×５×５×…となるしかありません。しかしこのとき，真分数である既約分数の個数は（５－１）×５×５＝１００（個）以上になってしまいます。また，５０＝２×２５ですが，２６は素数ではないので，２６－１＝２５とすることもできません。よって，真分数である既約分数が５０個となる場合はありません。

このように，真分数である既約分数の個数が１４，２６，３４，３８，４４，５０の６通りの偶数になることはありません。よって，奇数の２４個とあわせて，３０個です。