

## 最難関問題

真分数である既約分数の個数・2

分子が分母より小さい整数である分数を真分数といいます。分母が6の分数のうち、真分数である既約分

数は、 $\frac{1}{6}$ と $\frac{5}{6}$ の2個あります。

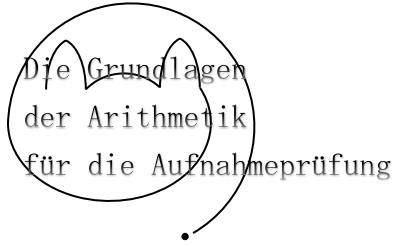
(1)

- ① 分母が30の真分数である既約分数は何個ありますか。
- ② 分母が150の真分数である既約分数は何個ありますか。
- ③ 分母が330の真分数である既約分数は何個ありますか。

(2) 次の□にあてはまる数をすべて答えなさい。ないときは、「ない」と答えなさい。

- ① 分母が□の真分数である既約分数は12個あります。
- ② 分母が□の真分数である既約分数は13個あります。
- ③ 分母が□の真分数である既約分数は14個あります。

(3) どのような整数Aについても、分母がAの真分数である既約分数の個数が□個ということはありません。□にあてはまる1以上50以下の整数は何個ありますか。



## 最難関問題

真分数である既約分数の個数・2

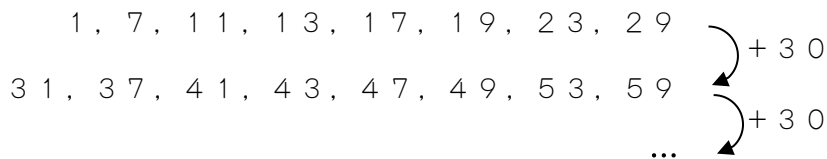
(1) ① 8個 ② 40個 ③ 80個

(2) ① 13, 21, 28, 36, 42 ② ない ③ ない (3) 30個

(1)

① 素因数分解をすると  $30 = 2 \times 3 \times 5$  ですから、分子は2, 3, 5の倍数ではない30未満の整数です。具体的には、1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29の8個があります。よって、分母が30の真分数である既約分数は8個あります。

② 素因数分解をすると  $150 = 2 \times 3 \times 5 \times 5$  ですから、①の30と比べると、素因数は2, 3, 5のまま変わりません。よって、②で考えた8個の整数の周期的な並びが5回くり返されるだけです。



そのため、 $8 \times 5 = 40$  (個) です。

③ 素因数分解をすると  $330 = 2 \times 3 \times 5 \times 11$  です。ここで、新たに素因数に加わった11のことをいったん忘れて、既約分数の分子の候補は、8個の整数の周期的な並びが11回くり返されるので、 $8 \times 11 = 88$  (個) です。

ここから、11の倍数を除きます。 $330 = 11 \times 30$  ですから、 $11 \times 1 \sim 11 \times 30$  という11の倍数のうち、 $11 \times \square$  の  $\square$  に入る部分の数が2, 3, 5の倍数でない数が、上で考えた分子の候補に含まれています。 $\square$  にあてはまる数は、実は①で既に求めている8個の整数に他なりません。

よって、 $88 - 8 = 80$  (個) です。

## 最難関問題

(2) (1) をどう活かすのかを考えます。(1) の②では、分母が30の真分数である既約分数が8個であるのに対し、30の素因数でもある素数5をかけてきでる150が分母の、真分数である既約分数は、 $8 \times 5 = 40$  (個) ありました。

それに対して、(1) の③では、 $8 \times 11 = 88$  (個) の候補のうち、8個が11の倍数なので、 $8 \times (11 - 1) = 80$  (個) となりました。以上から、次のことが成り立ちます。

整数Aが分母となっている真分数である既約分数がN個あるとき、  
素数MがAの素因数であるのなら、分母がA×Mの真分数である既約分数の個数はN×M個、  
素数MがAの素因数でないのなら、分母がA×Mの真分数である既約分数の個数はN×(M-1)個

整数A自身も素数の積ですから、以下では分母を素因数分解した形で考えます。素数2の個数に注目をして場合分けると、次のようになります。

①

○  $2 \times 2 \times 2 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が2だと真分数である既約分数は1個なので、分母が $2 \times 2 \times 2$ だと $1 \times 2 \times 2 = 4$  (個) です。3をかけて分母を $2 \times 2 \times 2 \times 3$ とすると、 $4 \times (3 - 1) = 8$  (個) となり、8は12の約数ではないのでここから先はうまくいきません。また、5をかけて分母を $2 \times 2 \times 2 \times 5$ とすると、 $4 \times (5 - 1) = 16$  (個) となり、大きくなりすぎてしまいます。

このように、真分数である既約分数が12個となる分母は得られません。

○  $2 \times 2 \times$  (他の素数をいくつか) の場合

分母が2だと真分数である既約分数は1個なので、分母が $2 \times 2$ だと $1 \times 2 = 2$  (個) です。3をかけて分母を $2 \times 2 \times 3$ とすると、 $2 \times (3 - 1) = 4$  (個) となるので、分母を $2 \times 2 \times 3 \times 3$ とすると、 $4 \times 3 = 12$  (個) となります。よって、分母が $2 \times 2 \times 3 \times 3 = 36$ の場合に条件を満たします。

5をかけて分母を $2 \times 2 \times 5$ とすると、 $2 \times (5 - 1) = 8$  (個) となってうまくいきません。

7をかけて分母を $2 \times 2 \times 7$ とすると、 $2 \times (7 - 1) = 12$  (個) となります。よって、分母が $2 \times 2 \times 7 = 28$ の場合も条件を満たします。

## 最難関問題

### ○ $2 \times$ (他の素数をいくつか) の場合

分母が2だと真分数である既約分数は1個なので、分母が $2 \times 3$ だと $1 \times (3 - 1) = 2$  (個) です。ここで3をかけて分母を $2 \times 3 \times 3$ とすると、 $2 \times 3 = 6$  (個) となります。さらに3以上の素数をかけても、この6個を2倍することはできません。

5をかけて分母を $2 \times 3 \times 5$ としても、 $2 \times (5 - 1) = 8$  (個) となってうまくいきません。

7をかけて分母を $2 \times 3 \times 7$ とすると、 $2 \times (7 - 1) = 12$  (個) となります。よって、分母が $2 \times 3 \times 7 = 42$ の場合も条件を満たします。

次に、分母が $2 \times 5$ だと $1 \times (5 - 1) = 4$  (個) となりますが、さらに5以上の素数をかけても、この4個を3倍することはできません。分母が $2 \times 7$ の場合は、 $1 \times (7 - 1) = 6$  (個) となりますが、さらに7以上の素数をかけても、この6個を2倍することはできません。

### ○ 2以外の素数の積の場合

分母が3だと真分数である既約分数は2個なので、分母が $3 \times 7$ だと $2 \times (7 - 1) = 12$  (個) となります。よって、分母が $3 \times 7 = 21$ の場合に条件を満たします。

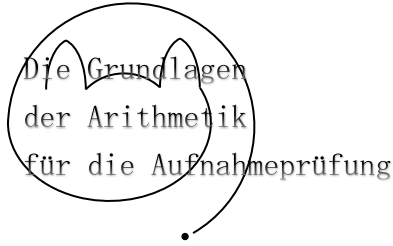
分母が5, 7, 11だと真分数である既約分数は4個, 6個, 10個となり、うまくいきません。

分母が13だと真分数である既約分数は12個なので、条件を満たします。

以上より、13, 21, 28, 36, 42です。

② 13は素数ですから、ここまで見てきた方法のよって真分数である既約分数が13個となるためには、14が素数であって、 $14 - 1 = 13$  (個) とするしかありません。もちろん、14は素数ではありませんから、このようなことは成り立ちません。よって、真分数である既約分数が13個となることはありません。

③ まず、15は素数ではないので、分母が15の真分数である既約分数が $15 - 1 = 14$  (個) にはなりません。かけ算によって14になるためには、 $14 = 2 \times 7$ であることから、7に注目します。8は素数ではないので、 $8 - 1 = 7$ にはなりません。よって、かけ算において7が現れるためには、分母を素因数分解したときに7が2個以上現れて、 $(7 - 1) \times 7 \times \dots$ となるしかありません。しかしこのとき、真分数である既約分数の個数は $(7 - 1) \times 7 = 42$  (個) 以上になってしまいます。よって、真分数である既約分数が14個となることはありません。



## 最難関問題

(3) 改めて、次の仕組みを考えます。

整数  $A$  が分母となっている真分数である既約分数が  $N$  個あるとき、  
 素数  $M$  が  $A$  の素因数であるのなら、分母が  $A \times M$  の真分数である既約分数の個数は  $N \times M$  個、  
 素数  $M$  が  $A$  の素因数でないのなら、分母が  $A \times M$  の真分数である既約分数の個数は  $N \times (M - 1)$  個

整数  $A$  は真分数の分母ですから 2 以上となるので、素数か素数の積です。このことから、 $A = 2$  で真分数である既約分数が  $\frac{1}{2}$  の 1 個である場合を除くと、真分数である既約分数が奇数個であることはあり得ない、ということを示すことができます。

整数  $A$  を素因数分解したときに 2 が 2 個以上現れる場合、真分数である既約分数の個数は、 $(2 - 1) \times 2 \times \dots$  となって偶数になります。また、2 以外の素数はすべて奇数ですから、素因数分解したときに 2 以外の素数  $\square$  を含む場合は、真分数である既約分数の個数は、 $\dots \times (\square - 1) \times \dots$  となって偶数になります。よって、真分数である既約分数の個数が 3 以上 49 以下の 24 個の奇数のいずれかになることはあり得ません。

次に、偶数個の場合について考えます。まず、素数  $- 1$  の偶数については、たとえば分母 3 の真分数である既約分数が  $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$  の 2 個あるように、可能です。この条件を満たすのは、2, 4, 6, 10, 12, 16, 18, 22, 28, 30, 36, 40, 42, 46 です。残りの偶数については、それぞれ考えていきます。

8...分母が  $2 \times 2 \times 2 \times 2$  のときに、 $(2 - 1) \times 2 \times 2 \times 2 = 8$  (個) となるので可能です。

14... (2) ③の通り、不可能です。

20...分母が  $5 \times 5$  のときに、 $(5 - 1) \times 5 = 20$  (個) となるので可能です。

24...分母が  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$  のときに、 $(2 - 1) \times 2 \times 2 \times (3 - 1) \times 3 = 24$  (個) となるので可能です。

26...  $26 = 2 \times 13$  ですが、かけ算において 13 が現れるためには、分母を素因数分解したときに 13 が 2 個以上現れて、 $(13 - 1) \times 13 \times \dots$  となるしかありません。しかしこのとき、真分数である既約分数の個数は  $(13 - 1) \times 13 = 156$  (個) 以上になってしまいます。よって、真分数である既約分数が 26 個となる場合はありません。

## 最難関問題

32…分母が $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ のときに、 $(2-1) \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$  (個) となるので可能です。

34… $34 = 2 \times 17$ なので、26のときと同じように、不可能です。

38… $38 = 2 \times 19$ なので、26のときと同じように、不可能です。

44… $44 = 2 \times 2 \times 11$ なので、26のときと同じように、不可能です。

48…分母が $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$ のときに、 $(2-1) \times 2 \times 2 \times 2 \times (3-1) \times 3 = 48$  (個) となるので可能です。

50… $50 = 2 \times 5 \times 5$ です。かけ算において5が2個以上現れるためには、素因数分解をしたときに5が3個以上現れて、 $(5-1) \times 5 \times 5 \times \dots$ となるしかありません。しかしこのとき、真分数である既約分数の個数は $(5-1) \times 5 \times 5 = 100$  (個) 以上になってしまいます。また、 $50 = 2 \times 25$ ですが、26は素数ではないので、 $26-1 = 25$ とすることもできません。よって、真分数である既約分数が50個となる場合はありません。

このように、真分数である既約分数の個数が14, 26, 34, 38, 44, 50の6通りの偶数になることはありません。よって、奇数の24個とあわせて、30個です。